



$$A = \frac{m}{(m^2 + c)^2}$$



NIOS PYQ's SOLUTIONS

$$\sqrt{a} = bc^2$$

$$\sqrt{h-x^2}$$

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS & ANSWERS



APRIL 2026

Your Path to Success

(SET – A)

भाग – A

प्र1. एक रेखा, जो दोनों अक्षों की धनात्मक भुजाओं पर बराबर लंबाई के अंतःखंड काटती है, की प्रवणता है:

- (A) -1 (B) 1
(C) 0 (D) 2

उत्तर: (A) -1

प्र2. बिंदु $(2, 3)$ से रेखा $y = 3x + 4$ पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक हैं:

- (A) $\left(\frac{37}{10}, \frac{-1}{10}\right)$ (B) $\left(\frac{-1}{10}, \frac{37}{10}\right)$
(C) $\left(\frac{10}{37}, -10\right)$ (D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

उत्तर: (B) $\left(\frac{-1}{10}, \frac{37}{10}\right)$

प्र3. यदि कोई वृत्त बिंदुओं $(0, 0)$, $(a, 0)$ और $(0, b)$ से होकर जाता है, तो वृत्त का केंद्र है:

- (A) (a, b) (B) $\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$
(C) $(-a, -b)$ (D) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

उत्तर: (D) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

प्र4. दीर्घवृत्त $3x^2 + y^2 = 12$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई है:

- (A) 8 (B) 4
(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

उत्तर: (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

प्र5. उस परवलय का समीकरण, जिसका शीर्ष $(-3, 0)$ है तथा नियता $x + 5 = 0$ है:

- (A) $x^2 = 8(y + 3)$ (B) $y^2 = 8(x + 3)$
(C) $x^2 = -8(y + 3)$ (D) $y^2 = -8(x + 3)$

उत्तर: (B) $y^2 = 8(x + 3)$

प्र6. यदि $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो:

- (A) $x = 1, y = 3, z = 4$ (B) $x = 1, y = 4, z = 3$
(C) $x = 3, y = 1, z = 4$ (D) $x = 3, y = 4, z = 1$

उत्तर: (B) $x = 1, y = 4, z = 3$



प्र7. आव्यूह $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -6 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ में $a_{13} a_{23} + a_{31}$ का मान है:

- (A) 0 (B) 12
(C) -4 (D) 14

उत्तर: (D) 14

प्र8. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ में a_{23} का सहखंडज है:

- (A) 1 (B) -1
(C) 2 (D) 4

उत्तर: (B) -1

प्र9. यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है, तो:

- (A) f एकैकी तथा आच्छादक है
(B) f बहु-एकैकी तथा आच्छादक है
(C) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है
(D) f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है

उत्तर: (D) f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है

प्र10. यदि $f(x) = x^2 + 2$ तथा $g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}$ ($x \neq 1$), तो $f \circ g(x)$ है:

- (A) x (B) $x^4 + 4x^2 + 6$
(C) $\frac{x^2}{(1-x)^2} + 2$ (D) $\frac{x^2+2}{x^2+1}$

उत्तर: (C) $\frac{x^2}{(1-x)^2} + 2$

प्र11. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में संबंध $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ है:

- (A) केवल स्वतुल्य (B) केवल सममित
(C) केवल संक्रामक (D) सममित तथा संक्रामक

उत्तर: (A) केवल स्वतुल्य

प्र12. यदि समुच्चय $\mathbb{R}^+$ पर एक द्विआधारी संक्रिया $a * b = \frac{ab}{3}$ (सभी $a, b \in \mathbb{R}^+$ के लिए) परिभाषित है, तो $(2 * 3) * 5$ का मान है:

- (A) 7 (B) 10
(C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

उत्तर: (D) $\frac{10}{3}$



प्र13. यदि $y = \log(2x + 3)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है:

(A) $\frac{1}{2x+3}$

(B) $(2x + 3)^2$

(C) $\frac{2}{2x+3}$

(D) $\frac{1}{2(2x+3)}$

उत्तर: (C) $\frac{2}{2x+3}$

प्र14. $y = \sin^3 x$ का x के सापेक्ष अवकलज है:

(A) $\cos^3 x$

(B) $3\sin^2 x$

(C) $\sin^2 x \cos x$

(D) $3\sin^2 x \cos x$

उत्तर: (D) $3\sin^2 x \cos x$

प्र15. निम्नलिखित में से कौन-सी एक सदिश राशि है?

(A) दूरी

(B) वेग

(C) आवर्तकाल

(D) किया गया कार्य

उत्तर: (B) वेग

प्र16. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश है:

(A) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(B) $5(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

(C) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

(D) $\frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

उत्तर: (D) $\frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

प्र17. यदि $OACB$ एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\vec{OC} = \vec{a}$ तथा $\vec{AB} = \vec{b}$ है, तो $\vec{OA}$ बराबर है:

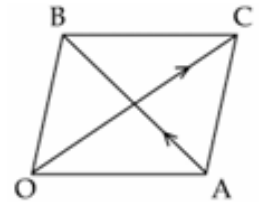
(A) $\vec{a} + \vec{b}$

(B) $\vec{a} - \vec{b}$

(C) $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

(D) $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

उत्तर: (C) $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$



प्र18. अवकल समीकरण $\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 \log\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ की घात है:

(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) परिभाषित नहीं

उत्तर: (D) परिभाषित नहीं

प्र19. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\log 2$

(C) $2\log 2$

(D) $\frac{1}{2}\log 2$

उत्तर: (D) $\frac{1}{2}\log 2$



प्र20. कथन "यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है, तो वह 3 से विभाज्य है" का विलोम है:

- (A) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है, तो वह 9 से विभाज्य है
 (B) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है, तो वह 3 से विभाज्य नहीं है
 (C) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य नहीं है, तो वह 9 से विभाज्य नहीं है
 (D) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य नहीं है, तो वह 3 से भी विभाज्य नहीं है

उत्तर: (A) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है, तो वह 9 से विभाज्य है

प्र21. कॉलम-I के कथन को कॉलम-II के सही विकल्प से मिलाइए:

एक 2×3 आव्यूह $[a_{ij}]$, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$ द्वारा दिए गए हैं।

कॉलम - I	कॉलम - II
(a) a_{23} है	(P) $\frac{1}{5}$
(b) a_{12} है	(Q) $\frac{-1}{5}$
	(R) $\frac{1}{3}$
	(S) $\frac{-1}{3}$

उत्तर: (a) $\rightarrow$ (Q); (b) $\rightarrow$ (S)

प्र22. रिक्त स्थानों को भरिए:

(a) समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ तथा $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ के बीच की दूरी _____ इकाई है। $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) अवकल समीकरण $y = \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ की कोटि _____ है। **कोटि = 1**

प्र23. सही कथन के लिए "सत्य" तथा गलत कथन के लिए "असत्य" लिखिए:

(a) फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 2, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है, $x = 0$ पर संतत है। **असत्य**

(b) फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित है, $\mathbb{R}$ के सभी बिंदुओं पर संतत है। **सत्य**

प्र24. निम्नलिखित प्रत्येक कथन का निषेधन लिखिए:

(a) गुजरात की राजधानी अहमदाबाद है।

उत्तर: किसी कथन p का निषेधन " p नहीं" ($\sim p$) होता है।

निषेधन: गुजरात की राजधानी अहमदाबाद नहीं है।

(b) सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

उत्तर: एक सार्वत्रिक कथन "सभी A, B हैं" का निषेधन होता है "ऐसा नहीं है कि सभी A, B हैं", जिसे "कम से कम एक A ऐसा है जो B नहीं है" के रूप में कहा जा सकता है।



निषेधन: यह असत्य है कि सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं। (समतुल्य रूप में: सभी वृत्त सर्वांगसम नहीं होते / कम से कम एक जोड़ी वृत्त ऐसी है जो सर्वांगसम नहीं है।)

प्र25. रिक्त स्थानों को भरिए:

- (a) फलन $f(x) = x - \cos x$ सभी x के लिए _____ फलन है। **वर्धमान**
- (b) फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ का स्थानीय निम्निष्ठ _____ पर स्थित है। **$x = 2$**
- (c) वक्र $x^3 + x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$ के अभिलंब की प्रवणता $(1, 1)$ पर _____ है। **$\frac{5}{8}$**
- (d) किसी वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा बिंदु (x_1, y_1) पर x -अक्ष के समांतर होती है, यदि _____। **$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$**

प्र26. रिक्त स्थानों को भरिए:

- (a) यदि $y = e^{\sin^{-1} x}$ है, तो $dy/dx =$ _____। **$\frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$**
- (b) यदि $x = at^2, y = 2at$ है, तो $dy/dx =$ _____। **$\frac{1}{t}$**
- (c) तृतीय कोटि के अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या _____ है। **0 (शून्य)**
- (d) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ _____। **$\frac{e^x}{x} + C$**

प्र27. सही कथन के लिए "सत्य" तथा गलत कथन के लिए "असत्य" लिखिए:

- (a) दो आव्यूह तुलनीय होते हैं यदि उनमें से प्रत्येक में उतनी ही पंक्तियाँ तथा स्तंभ हों जितने दूसरे में हैं। **सत्य**
- (b) आव्यूह A विचित्र कहलाता है यदि $|A| \neq 0$ । **असत्य**
- (c) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ का सहखंडज $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है। **सत्य**
- (d) कोटि 3 के विषम सममित आव्यूह का व्युत्क्रम एक विकर्ण आव्यूह होता है। **असत्य**

प्र28. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- (a) जाँच कीजिए कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में संबंध $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ एक तुल्यता संबंध है या नहीं।

उत्तर: R को तुल्यता संबंध होने के लिए, इसे स्वतुल्य, सममित, तथा संक्रामक होना चाहिए।

स्वतुल्यता: हमें $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$ चाहिए। इनमें से कोई भी R में उपस्थित नहीं है। अतः R स्वतुल्य नहीं है।
चूँकि R स्वतुल्य नहीं है, इसलिए R तुल्यता संबंध नहीं है।

(पूर्णता के लिए: सममित $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$, अतः R सममित है। संक्रामक $(1, 2) \in R, (2, 1) \in R \Rightarrow (1, 1)$ का R में होना संक्रामकता के लिए आवश्यक है, परंतु यह उपस्थित नहीं है, अतः R संक्रामक भी नहीं है।) R एक तुल्यता संबंध नहीं है (क्योंकि यह स्वतुल्य नहीं है)।

- (b) जाँच कीजिए कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी तथा आच्छादक है या नहीं।

उत्तर: एकैकी: मान लीजिए $f(x_1) = f(x_2)$

$$3 - 4x_1 = 3 - 4x_2 \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

अतः f एकैकी है।



आच्छादक: मान लीजिए $y \in \mathbb{R}$ (सह-प्रांत) कोई स्वेच्छ अवयव है। हमें ऐसा $x \in \mathbb{R}$ खोजना है कि $f(x) = y$ हो।

$$y = 3 - 4x \Rightarrow x = \frac{3-y}{4}$$

चूँकि प्रत्येक $y \in \mathbb{R}$ के लिए $x = \frac{3-y}{4} \in \mathbb{R}$ है, अतः f आच्छादक है।

$f(x) = 3 - 4x$ एकैकी तथा आच्छादक दोनों है।

(c) ज्ञात कीजिए: $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$

उत्तर: हम जानते हैं कि $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\sin^{-1}(\cos x) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \frac{\pi}{2} - x$$

(यह $x \in [0, \pi]$ के लिए मान्य है, मुख्य परिसर के विचार से)

$$\int \sin^{-1}(\cos x) dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{अतः, } \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + C$$

(d) अवकलजों का उपयोग करते हुए, $\sqrt{26}$ का सन्निकट मान दशमलव के एक स्थान तक ज्ञात कीजिए।

उत्तर: मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}$ । $x = 25$ (निकटतम पूर्ण वर्ग) तथा $\Delta x = 1$ लीजिए।

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\sqrt{26} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 1$$

$$\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{2 \times 5} = 5 + \frac{1}{10} = 5 + 0.1 = 5.1$$

$$\text{अतः } \sqrt{26} \approx 5.1$$

प्र29. मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ दो सदिश हैं। तब:

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात कीजिए

$$\text{उत्तर: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[(1)(1) - (1)(-1)] - \hat{j}[(1)(1) - (1)(1)] + \hat{k}[(1)(-1) - (1)(1)]$$

$$= \hat{i}[1 + 1] - \hat{j}[1 - 1] + \hat{k}[-1 - 1]$$

$$= 2\hat{i} - 0\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\text{अतः } \vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$$

(b) $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए

$$\text{उत्तर: } \vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(1) + (1)(-1) + (1)(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$



$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

(c) $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए

उत्तर: $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) जाँच कीजिए, यदि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

उत्तर: हम जानते हैं कि सदिश गुणनफल प्रति-क्रमविनिमेय होता है: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ । हम पहले ही पा चुके हैं कि $\vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{k} \neq \vec{0}$ (जब तक सदिश समांतर न हों, जो यहाँ नहीं हैं)।

अतः $\vec{b} \times \vec{a} = -2\hat{i} + 2\hat{k} \neq \vec{a} \times \vec{b}$ (क्योंकि $2\hat{i} - 2\hat{k} \neq -2\hat{i} + 2\hat{k}$)।

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ (ये एक-दूसरे के ऋणात्मक हैं, बराबर नहीं, क्योंकि $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$)

(e) $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ को विकर्णों के रूप में रखने वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर: विकर्ण $\vec{a}, \vec{b}$ वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है: क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |2\hat{i} - 2\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(f) जाँच कीजिए, यदि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 (\vec{b})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

उत्तर: यह लाग्रान्ज सर्वसमिका है, जो सदैव सत्य होनी चाहिए।

बायाँ पक्ष (LHS): $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |2\hat{i} - 2\hat{k}|^2 = 4 + 4 = 8$

दायाँ पक्ष (RHS): $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\sqrt{3})^2 (\sqrt{3})^2 - (1)^2$
 $= 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$

चूँकि बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष = 8

अतः सर्वसमिका सत्य सिद्ध हुई।

भाग - B

प्र30. आव्यूह विधि से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$5x - 7y = 3$$

$$x + 3y = 5$$

उत्तर: इसे आव्यूह रूप $AX = B$ में लिखिए: $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 5(3) - (-7)(1) = 15 + 7 = 22 \neq 0$$

चूँकि $|A| \neq 0$, अतः A^{-1} अस्तित्व में है।



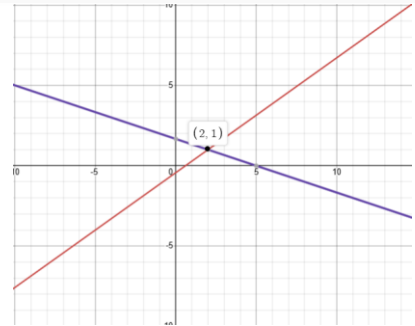
$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 9 + 35 \\ -3 + 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 44 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2, y = 1$



प्र31. सरल कीजिए: (i) $\cos(\sin^{-1} x)$

उत्तर: मान लीजिए $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow \sin \theta = x$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

अतः $\sqrt{1 - x^2}$

या

(ii) $\cot(\text{cosec}^{-1} x)$

उत्तर: मान लीजिए $\text{cosec}^{-1} x = \theta \Rightarrow \text{cosec} \theta = x$

हम जानते हैं: $\text{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \Rightarrow \cot^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta - 1 = x^2 - 1$

$$\cot \theta = \sqrt{x^2 - 1}$$

अतः $\sqrt{x^2 - 1}$

प्र32. ज्ञात कीजिए: (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3} \right)$

उत्तर: $x = 3$ पर: अंश = $81 - 81 = 0$; हर = $18 - 15 - 3 = 0$ (रूप $0/0$)

$$\text{अंश: } x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

$$\text{हर: } 2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x(x - 3) + 1(x - 3) = (2x + 1)(x - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(2x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x^2+9)}{2x+1}$$

$$= \frac{(3+3)(9+9)}{2(3)+1} = \frac{6 \times 18}{7} = \frac{108}{7}$$

या

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

उत्तर: $1 - \cos x = 2\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$ का उपयोग करते हुए:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}$$



$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \times (1)^2 = \frac{1}{2}$$

प्र33. शांकव के नाभियों, शीर्षों, उत्केंद्रता, तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

उत्तर: यह एक अतिपरवलय है जिसमें $a^2 = 16, b^2 = 9$, अतः $a = 4, b = 3$ ।

शीर्ष: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$$

नाभियाँ: $(\pm c, 0) = (\pm 5, 0)$

उत्केंद्रता: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

या

(ii) $4x^2 + 9y^2 = 36$

उत्तर: 36 से भाग देने पर: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

यह एक दीर्घवृत्त है जिसमें $a^2 = 9, b^2 = 4$ (चूँकि $9 > 4$, दीर्घ अक्ष x -अक्ष के अनुदिश है), अतः $a = 3, b = 2$ ।

शीर्ष: $(\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

नाभियाँ: $(\pm \sqrt{5}, 0)$

उत्केंद्रता: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$

प्र34. सारणिक को प्रसारित किए बिना, सिद्ध कीजिए कि
$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर: मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

यह एक विषम सममित आव्यूह है (क्योंकि $A^T = -A$: स्थानांतरण से $\begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ प्राप्त होता है जो ठीक $-A$ है)।

हम जानते हैं कि किसी वर्ग आव्यूह A के लिए, $|A^T| = |A|$ ।

साथ ही, यदि $A^T = -A$ (विषम सममित) है, तो $|A^T| = |-A| = (-1)^3 |A| = -|A|$ (क्योंकि यह 3×3 , अर्थात् विषम कोटि का आव्यूह है)।

अतः $|A| = |A^T| = -|A|$

$\Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$



अतः सिद्ध हुआ: $\Delta = 0$

प्र35. प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरण का उपयोग करते हुए, आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

उत्तर: $A = IA$ लिखिए: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2: \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 \rightarrow -R_1: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 \rightarrow -R_2: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2(-4) & 1 - 2(3) \\ -4 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} A$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

प्र36. ज्ञात कीजिए: $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

उत्तर: मानक सूत्र $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ का उपयोग करते हुए, $a = 3$ के साथ: $\int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \log \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$

या

मान निकालिए: $\int_0^2 3^x dx$

$$\text{उत्तर: } \int_0^2 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\log 3} \right]_0^2$$

$$= \frac{3^2}{\log 3} - \frac{3^0}{\log 3} = \frac{9-1}{\log 3}$$

$$= \frac{8}{\log 3}$$

प्र37. उस k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखा $(k-3)x - (4-k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$, x -अक्ष के समांतर है।

उत्तर: कोई रेखा x -अक्ष के समांतर होती है जब x का गुणांक शून्य हो (तथा y का गुणांक अशून्य हो), अर्थात् रेखा $y =$ अचर के रूप की हो।

अतः हमें आवश्यकता है: $k-3 = 0 \Rightarrow k = 3$

जाँच: $k = 3$ पर, y का गुणांक $-(4-9) = -(-5) = 5 \neq 0$, अतः रेखा वास्तव में एक वैध क्षैतिज रेखा में परिणत होती है।

अतः $k = 3$

प्र38. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(1, -1, 5)$ से होकर जाती है तथा रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-2}, z = -1$ के समांतर है।

उत्तर: दी गई रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-2}, z = -1$ को मानक सममित रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-(-1)}{0}$



अतः इसके दिक् अनुपात $3, -2, 0$ हैं।

चूँकि अभीष्ट रेखा इस रेखा के समांतर है, इसके दिक् अनुपात भी समान हैं: $3, -2, 0$ ।

अभीष्ट रेखा $(1, -1, 5)$ से होकर जाती है: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-(-1)}{-2} = \frac{z-5}{0}$

प्र39. मान निकालिए: $\int_{-5}^5 |x+2| dx$

उत्तर: $|x+2| = 0$ जब $x = -2$

$x < -2$ के लिए: $x+2 < 0$, अतः $|x+2| = -(x+2)$

$x \geq -2$ के लिए: $x+2 \geq 0$, अतः $|x+2| = x+2$

$$\int_{-5}^5 |x+2| dx = \int_{-5}^{-2} -(x+2) dx + \int_{-2}^5 (x+2) dx$$

पहला समाकल: $\int_{-5}^{-2} -(x+2) dx = -\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-5}^{-2}$

$$= -\left[\left(\frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{25}{2} - 10\right)\right]$$

$$= -[(2 - 4) - (12.5 - 10)]$$

$$= -[-2 - 2.5]$$

$$= -(-4.5) = 4.5$$

दूसरा समाकल: $\int_{-2}^5 (x+2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^5$

$$= \left(\frac{25}{2} + 10\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$$

$$= (12.5 + 10) - (2 - 4)$$

$$= 22.5 - (-2) = 24.5$$

कुल: $4.5 + 24.5 = 29$

या

समाकलन का प्रयोग करते हुए, वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x+2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर: प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए: $x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$$x = -1 \text{ या } x = 2$$

$x \in (-1, 2)$ के लिए, रेखा $y = x+2$ परवलय $y = x^2$ के ऊपर स्थित है ($x = 0$ पर जाँचें: रेखा 2 देती है, परवलय 0 देता है)।

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_{-1}^2 [(x+2) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$$

$$x = 2 \text{ पर: } \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} = 2 + 4 - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{18-8}{3} = \frac{10}{3}$$



$$x = -1 \text{ पर: } \frac{1}{2} - 2 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{3-12+2}{6} = \frac{-7}{6}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{10}{3} - \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6}$$

$$= \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

अतः क्षेत्रफल = $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

प्र40. उस समतल का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$ तथा $(-2, 2, -1)$ से होकर जाता है। साथ ही, समतल का सदिश समीकरण भी लिखिए।

उत्तर: मान लीजिए समतल $A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,2,-1)$ से होकर जाता है।

$$\overrightarrow{AB} = (1-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (-1-0)\hat{k} = -3\hat{i} + 1\hat{j} - 1\hat{k}$$

अभिलंब सदिश $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[(1)(-1) - (1)(1)] - \hat{j}[(0)(-1) - (1)(-3)] + \hat{k}[(0)(1) - (1)(-3)]$$

$$= \hat{i}[-1-1] - \hat{j}[0+3] + \hat{k}[0+3]$$

$$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

अतः अभिलंब के दिक् अनुपात $-2, -3, 3$ हैं (या समतुल्य रूप में $2, 3, -3$)।

$(1, 1, 0)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण, अभिलंब $(-2, -3, 3)$ के साथ: $-2(x-1) - 3(y-1) + 3(z-0) = 0$

$$-2x + 2 - 3y + 3 + 3z = 0$$

$$-2x - 3y + 3z + 5 = 0$$

$$2x + 3y - 3z = 5$$

कार्तीय समीकरण: $2x + 3y - 3z = 5$

सदिश समीकरण: $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$

प्र41. दर्शाइए कि सभी त्रिभुजों के समुच्चय A में परिभाषित संबंध $R\{(T_1, T_2): T_1, T_2 \text{ के समरूप (similar) है, जहाँ } T_1, T_2 \in A\}$, एक तुल्यता संबंध है।

उत्तर: R को तुल्यता संबंध सिद्ध करने के लिए, हमें दर्शाना होगा कि यह स्वतुल्य, सममित, तथा संक्रामक है।

स्वतुल्यता: प्रत्येक त्रिभुज T , स्वयं के समरूप होता है (क्योंकि सभी संगत कोण बराबर होते हैं तथा सभी संगत भुजाएँ समान अनुपात $1:1$ में होती हैं)। अतः सभी $T \in A$ के लिए $(T, T) \in R$ ।



अतः R स्वतुल्य है।

सममिति: मान लीजिए $(T_1, T_2) \in R$, अर्थात् T_1, T_2 के समरूप है। इसका अर्थ है कि T_1 तथा T_2 के संगत कोण बराबर हैं तथा संगत भुजाएँ अनुपाती हैं। चूँकि समरूपता एक पारस्परिक/उत्क्रमणीय संबंध है (यदि $T_1 \sim T_2$ तो $T_2 \sim T_1$), हमें प्राप्त होता है $(T_2, T_1) \in R$ ।

अतः R सममित है।

संक्रामकता: मान लीजिए $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$, अर्थात् T_1, T_2 के समरूप है, तथा T_2, T_3 के समरूप है। तब T_1 के संगत कोण T_2 के संगत कोणों के बराबर हैं, तथा T_2 के संगत कोण T_3 के संगत कोणों के बराबर हैं। अतः T_1 के संगत कोण T_3 के संगत कोणों के बराबर हैं, तथा इसी प्रकार, भुजाएँ भी पूरी तरह अनुपाती हैं। अतः T_1, T_3 के समरूप है, अर्थात् $(T_1, T_3) \in R$ ।

अतः R संक्रामक है।

चूँकि R स्वतुल्य, सममित, तथा संक्रामक है, अतः R एक तुल्यता संबंध है।

प्र42. दर्शाइए कि वक्र $6y = 3x^5 + 2x^3 - 3x$ पर बिंदुओं $x = \pm 3$ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

उत्तर: $6y = 3x^5 + 2x^3 - 3x$ को x के सापेक्ष विवृत रूप से अवकलित करने पर:

$$6 \frac{dy}{dx} = 15x^4 + 6x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^4 + 6x^2 - 3}{6}$$

चूँकि व्यंजक $15x^4 + 6x^2 - 3$ में केवल x की सम घातें हैं (अर्थात् x^4 तथा x^2), इसलिए प्रवणता $\frac{dy}{dx}$, $x = 3$ तथा $x = -3$ पर समान होगी (क्योंकि $(3)^4 = (-3)^4$ तथा $(3)^2 = (-3)^2$)।

$$x = 3 \text{ पर: } \frac{dy}{dx} = \frac{15(81) + 6(9) - 3}{6} = \frac{1215 + 54 - 3}{6} = \frac{1266}{6} = 211$$

$$x = -3 \text{ पर: } \frac{dy}{dx} = \frac{15(81) + 6(9) - 3}{6} = \frac{1266}{6} = 211$$

चूँकि $x = 3$ तथा $x = -3$ पर प्रवणताएँ बराबर हैं (दोनों = 211), अतः इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

अतः सिद्ध हुआ: स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

या

वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ वर्धमान या ह्रासमान है।

$$\text{उत्तर: } f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

$$= 6(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ रखने पर: } x = 2 \text{ या } x = -1$$

ये बिंदु वास्तविक रेखा को तीन अंतरालों में विभाजित करते हैं: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ ।

अंतराल $(-\infty, -1)$: $x = -2$ लीजिए: $f'(-2) = 6(-2 - 2)(-2 + 1) = 6(-4)(-1) = 24 > 0$ — वर्धमान

अंतराल $(-1, 2)$: $x = 0$ लीजिए: $f'(0) = 6(0 - 2)(0 + 1) = 6(-2)(1) = -12 < 0$ — ह्रासमान



अंतराल $(2, \infty)$: $x = 3$ लीजिए: $f'(3) = 6(3 - 2)(3 + 1) = 6(1)(4) = 24 > 0$ — वर्धमान

- $f(x)$, $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ पर वर्धमान है
- $f(x)$, $(-1, 2)$ पर ह्रासमान है

प्र43. दर्शाइए कि स्थिति सदिशों $4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$, $2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ वाले चार बिंदु A, B, C तथा D समतलीय हैं।

उत्तर: $\vec{A} = 4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{D} = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2 - 4)\hat{i} + (4 - 8)\hat{j} + (6 - 12)\hat{k} = -2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (3 - 4)\hat{i} + (5 - 8)\hat{j} + (4 - 12)\hat{k} = -1\hat{i} - 3\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (5 - 4)\hat{i} + (8 - 8)\hat{j} + (5 - 12)\hat{k} = 1\hat{i} + 0\hat{j} - 7\hat{k}$$

चार बिंदु A, B, C, D समतलीय होते हैं यदि अदिश त्रिगुणनफल $[\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}] = 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\text{पंक्ति 1 के अनुदिश प्रसार करने पर:} = -2 \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + (-6) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2[(-3)(-7) - (-8)(0)] + 4[(-1)(-7) - (-8)(1)] - 6[(-1)(0) - (-3)(1)]$$

$$= -2[21 - 0] + 4[7 + 8] - 6[0 + 3]$$

$$= -2(21) + 4(15) - 6(3)$$

$$= -42 + 60 - 18$$

$$= 0$$

चूँकि अदिश त्रिगुणनफल = 0, अतः सदिश $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ समतलीय हैं।

अतः, बिंदु A, B, C तथा D समतलीय हैं।

प्र44. सारणिकों के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि:
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$(a + b + c)^3$$

उत्तर: मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$ लागू कीजिए

पंक्ति 1 बन जाती है: $(a - b - c + 2b + 2c)$, $(2a + b - c - a + 2c)$, $(2a + 2b + c - a - b)$

$$= (a + b + c), (a + b + c), (a + b + c)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

पंक्ति 1 से $(a+b+c)$ उभयनिष्ठ लेने पर: $\Delta = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$



$C_2 \rightarrow C_2 - C_1$ तथा $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ लागू कीजिए:

पंक्ति 1: 1,0,0

पंक्ति 2: $2b, (b - c - a - 2b), (2b - 2b) = 2b, (-b - c - a), 0$

पंक्ति 3: $2c, (2c - 2c), (c - a - b - 2c) = 2c, 0, (-a - b - c)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+c & 2b & -(a+b+c) \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

पंक्ति 1 के अनुदिश प्रसार करने पर (चूँकि इसमें केवल एक अशून्य अवयव है, स्थिति (1, 1) में 1):

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b+c) \times 1 \times \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \times [(-(a+b+c)) \times (-(a+b+c)) - 0] \\ &= (a+b+c) \times (a+b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

अतः सिद्ध हुआ।

या

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित रैखिक समीकरण

निकाय को हल कीजिए:

$$x + y + z = -2$$

$$x + 2y - 3z = 12$$

$$2x - y + 3z = -13$$

उत्तर: चरण 1: $|A|$ ज्ञात कीजिए

$$\begin{aligned} |A| &= 1(2 \times 3 - (-3)(-1)) - 1(1 \times 3 - (-3)(2)) + 1(1 \times (-1) - 2 \times 2) \\ &= 1(6 - 3) - 1(3 + 6) + 1(-1 - 4) \\ &= 1(3) - 1(9) + 1(-5) \\ &= 3 - 9 - 5 = -11 \end{aligned}$$

चरण 2: सहखंडज ज्ञात कीजिए

$$C_{11} = +(2 \times 3 - (-3)(-1)) = 6 - 3 = 3$$

$$C_{12} = -(1 \times 3 - (-3)(2)) = -(3 + 6) = -9$$

$$C_{13} = +(1 \times (-1) - 2 \times 2) = -1 - 4 = -5$$

$$C_{21} = -(1 \times 3 - 1 \times (-1)) = -(3 + 1) = -4$$



$$C_{22} = +(1 \times 3 - 1 \times 2) = 3 - 2 = 1$$

$$C_{23} = -(1 \times (-1) - 1 \times 2) = -(-1 - 2) = 3$$

$$C_{31} = +(1 \times (-3) - 1 \times 2) = -3 - 2 = -5$$

$$C_{32} = -(1 \times (-3) - 1 \times 1) = -(-3 - 1) = 4$$

$$C_{33} = +(1 \times 2 - 1 \times 1) = 2 - 1 = 1$$

चरण 3: A का सहखंडज (सहखंडज आव्यूह का परिवर्त)

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

चरण 4: A का व्युत्क्रम

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

चरण 5: $X = A^{-1}B$ का उपयोग करते हुए निकाय हल कीजिए

आव्यूह रूप में निकाय: $AX = B$, जहाँ $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -13 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -13 \end{bmatrix}$$

पंक्ति 1: $3(-2) + (-4)(12) + (-5)(-13) = -6 - 48 + 65 = 113$

पंक्ति 2: $-9(-2) + 1(12) + 4(-13) = 18 + 12 - 52 = -22$

पंक्ति 3: $-5(-2) + 3(12) + 1(-13) = 10 + 36 - 13 = 33$

$$X = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 11 \\ -22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = -1, y = 2, z = -3$

प्र45. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $z = x + 2y$ के अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए: $x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200, x \geq 0, y \geq 0$

उत्तर: व्यवरोध रेखाएँ:

1. $x + 2y = 100 \rightarrow (100, 0)$ तथा $(0, 50)$ से होकर जाती है
2. $2x - y = 0 \rightarrow$ मूलबिंदु से होकर जाती है, अर्थात् $y = 2x$
3. $2x + y = 200 \rightarrow (100, 0)$ तथा $(0, 200)$ से होकर जाती है

सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदु ज्ञात करना:

बिंदु A: $x + 2y = 100$ तथा $2x - y = 0$ (अर्थात् $y = 2x$) का प्रतिच्छेदन



$$x + 2(2x) = 100 \Rightarrow x + 4x = 100 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20, y = 40$$

बिंदु A = (20,40)

बिंदु B: $2x - y = 0$ तथा $2x + y = 200$ का प्रतिच्छेदन

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$2x + 2x = 200 \Rightarrow 4x = 200 \Rightarrow x = 50, y = 100$$

बिंदु B = (50,100)

बिंदु C: $x + 2y = 100$ तथा x -अक्ष ($y = 0$) का प्रतिच्छेदन

$$x + 0 = 100 \Rightarrow x = 100$$

बिंदु C = (100,0)

बिंदु D: $2x + y = 200$ तथा x -अक्ष ($y = 0$) का प्रतिच्छेदन

$$2x + 0 = 200 \Rightarrow x = 100$$

बिंदु D = (100,0), जो बिंदु C के समान ही है, अतः सुसंगत क्षेत्र x -अक्ष को (100,0) पर स्पर्श करता है। अतः सुसंगत (परिबद्ध) क्षेत्र के कोणीय बिंदु हैं: (20, 40), (50, 100), तथा (100, 0)

प्रत्येक कोणीय बिंदु पर $z = x + 2y$ का मूल्यांकन:

$$(20, 40) \text{ पर: } z = 20 + 2(40) = 20 + 80 = 100$$

$$(50, 100) \text{ पर: } z = 50 + 2(100) = 50 + 200 = 250$$

$$(100, 0) \text{ पर: } z = 100 + 2(0) = 100$$

z का अधिकतम मान = 250, (50, 100) पर

z का न्यूनतम मान = 100, (20, 40) पर तथा (100, 0) पर भी

या

एक कंपनी शीतल पेय बनाती है जिसके अनुबंध के अनुसार पेय की प्रत्येक बोतल में न्यूनतम 80 इकाई रसायन A तथा 60 इकाई रसायन B होना आवश्यक है। ये रसायन दो अलग-अलग आपूर्तिकर्ताओं, S तथा T, से तैयार मिश्रण पैकेटों में उपलब्ध हैं। आपूर्तिकर्ता S के पैकेट में 4 इकाई रसायन A तथा 2 इकाई रसायन B का मिश्रण है, तथा इसकी लागत ₹10 है। आपूर्तिकर्ता T के पैकेट में 1 इकाई A तथा 1 इकाई B का मिश्रण है, तथा इसकी लागत ₹4 है। इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या (L.P.P.) के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ताकि कंपनी न्यूनतम लागत पर अनुबंध की शर्तों को पूरा कर सके। साथ ही, व्यवरोधों के संगत सुसंगत क्षेत्र भी प्राप्त कीजिए।

उत्तर: L.P.P. के रूप में सूत्रीकरण:

उद्देश्य फलन (लागत न्यूनतम करना): न्यूनतम कीजिए $Z = 10x + 4y$

व्यवरोध: रसायन A के लिए (न्यूनतम 80 इकाई आवश्यक): $4x + y \geq 80$

रसायन B के लिए (न्यूनतम 60 इकाई आवश्यक): $6x + y \geq 60$

अक्रणात्मकता व्यवरोध: $x \geq 0, y \geq 0$



सुसंगत क्षेत्र:

सुसंगत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए, निम्नलिखित रेखाएँ आलेखित कीजिए:

रेखा 1: $4x + y = 80 \rightarrow (20, 0)$ तथा $(0, 80)$ से होकर जाती है

रेखा 2: $6x + y = 60 \rightarrow (10, 0)$ तथा $(0, 60)$ से होकर जाती है

दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदन ज्ञात करना: $4x + y = 80 \dots (i)$

$6x + y = 60 \dots (ii)$

(i) को (ii) से घटाने पर: $2x = -20 \Rightarrow x = -10$

चूँकि $x = -10$ ऋणात्मक है, दोनों रेखाएँ प्रथम चतुर्थांश (सुसंगत क्षेत्र) के भीतर प्रतिच्छेद नहीं करतीं। इसका अर्थ है कि प्रासंगिक क्षेत्र में एक व्यवरोध दूसरे पर प्रभावी है।

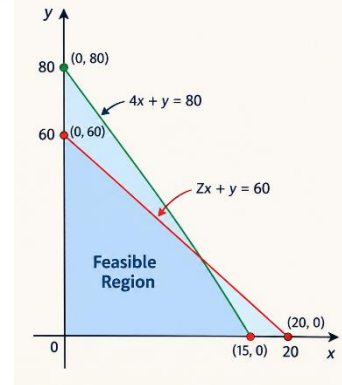
कौन-सा व्यवरोध निर्धारक है यह जाँचना: $x = 0$ पर: रेखा 1 देती है $y = 80$; रेखा 2 देती है $y = 60$ । चूँकि हमें $4x + y \geq 80$ तथा $6x + y \geq 60$ दोनों की आवश्यकता है, और रेखा 1 को $x = 0$ पर बड़े y -मान की आवश्यकता है, अतः व्यवरोध $4x + y \geq 80$, y -अक्ष के निकट अधिक प्रतिबंधात्मक व्यवरोध है।

सुसंगत क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में वह असीमित क्षेत्र है जो दोनों रेखाओं $4x + y = 80$ तथा $6x + y = 60$ के ऊपर (या उन पर) एक साथ स्थित है, तथा $x \geq 0$ और $y \geq 0$ द्वारा परिबद्ध है।

चूँकि $x \geq 0$ होने पर $4x + y \geq 80$ स्वतः ही $6x + y \geq 60$ को संतुष्ट करता है (जैसा कि धनात्मक क्षेत्र में गैर-प्रतिच्छेदन तथा ऊपर की सीमा जाँच से दर्शाया गया), अतः प्रभावी सुसंगत क्षेत्र मुख्यतः इनसे निर्धारित होता है: $4x + y \geq 80, x \geq 0, y \geq 0$

यह प्रथम चतुर्थांश में एक असीमित सुसंगत क्षेत्र है, जो रेखा $4x + y = 80$ पर तथा उसके ऊपर स्थित है।

(यह L.P.P. का सूत्रीकरण तथा प्रश्न में अपेक्षित सुसंगत क्षेत्र पूरा करता है यदि आगे आवश्यकता हो तो न्यूनतम लागत बिंदु इस असीमित सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदुओं पर $Z = 10x + 4y$ का मूल्यांकन करके, तथा कोनों से आगे के बिंदुओं की जाँच करके यह सुनिश्चित करते हुए कि उद्देश्य फलन असीमित रूप से घटता नहीं है, ज्ञात किया जा सकता है।)





Thank you!



We hope you found this material helpful. We wish you the very best for your examination.



Strive for Excellence – Your Path to Success