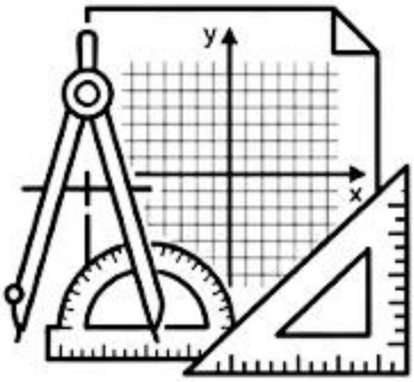
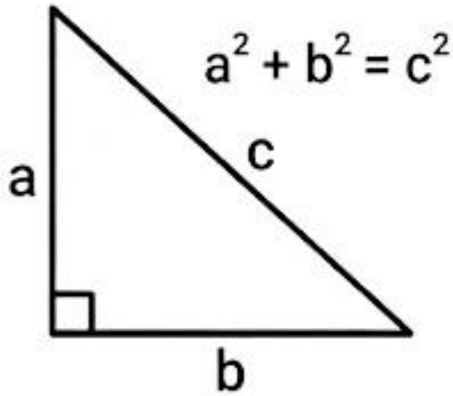
MVS FOUNDATION

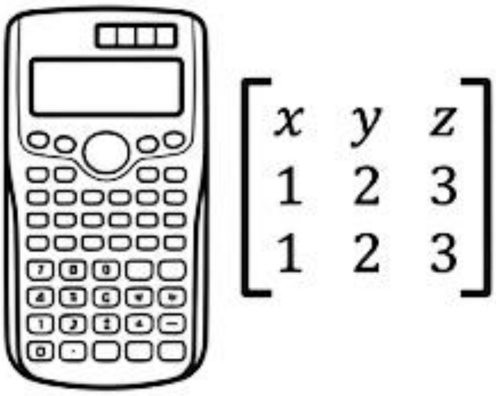
FREE NOTES

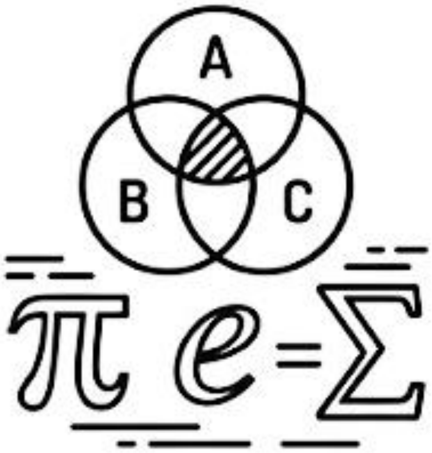
MATHEMATICS (311)

CHAPTERWISE NOTES









MATHEMATICS

Sl. No.	Module	Chapters (Public Examination)	Marks
1	Module 4: Co-ordinate Geometry	L-13 Cartesian System of Rectangular Co-ordinates; L-14 Straight Lines; L-15 Circles; L-16 Conic Sections	15
2	Module 6: Algebra-II	L-20 Matrices; L-21 Determinants; L-22 Inverse of a Matrix and its Applications	17
3	Module 9: Vectors and Three-Dimensional Geometry	L-33 Introduction to Three-Dimensional Geometry; L-34 Vectors; L-35 Plane; L-36 Straight Line	17
4	Module 10: Linear Programming and Mathematical Reasoning	L-37 Linear Programming; L-38 Mathematical Reasoning	9

Component	Details	Marks
Public Exam (Selected Modules 4,6,9,10)	Total Chapters: 13	58
Practical Exam	NA	0
TMA	Tutor Marked Assignment	20
Final Possible Marks		**78 Marks**

विषय सूची

1

आयताकार निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली

परिचय

निर्देशांक ज्यामिति गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा है जहाँ बीजगणित का उपयोग करके ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है। इस अध्याय में, हम **आयताकार निर्देशांक प्रणाली**, दूरी सूत्र, विभाजन सूत्र और रेखाओं के ढलान का अन्वेषण करेंगे। यह उन्नत अवधारणाओं के लिए एक मजबूत गणितीय आधार स्थापित करता है।

आयताकार निर्देशांक अक्ष

- **मूल बिंदु** (0,0) पर प्रतिच्छेद करने वाली दो परस्पर लंबवत रेखाएं (x-अक्ष और y-अक्ष) आयताकार निर्देशांक प्रणाली बनाती हैं।
- ये अक्ष तल को चार विशिष्ट क्षेत्रों में विभाजित करते हैं जिन्हें **चतुर्थांश** के रूप में जाना जाता है।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी

- एक तल में किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी की गणना **दूरी सूत्र** का उपयोग करके की जाती है:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

विभाजन सूत्र

जब एक बिंदु $R(x, y)$ दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$को मिलाने वाले रेखाखंड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

- **आंतरिक विभाजन:**

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

- **बाह्य विभाजन:**

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2} \quad , \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

- **मध्य-बिंदु सूत्र:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

- यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$ और $C(x_3, y_3)$ हैं, तो इसका क्षेत्रफल एक विशिष्ट सूत्र का उपयोग करके पाया जाता है।

- **सूत्र:**

$$Area = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

तीन बिंदुओं की संरेखता की शर्त

- तीन या अधिक बिंदुओं को **संरेख** कहा जाता है यदि वे ठीक एक ही सीधी रेखा पर स्थित हों।

- तीन बिंदुओं के संरेख होने के लिए, उनके द्वारा बनाए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल बिल्कुल शून्य (0) होना चाहिए।

- **सूत्र की शर्त:**

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

एक रेखा का झुकाव और ढलान

- **झुकाव (θ):** वामावर्त दिशा में मापी गई x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ एक रेखा द्वारा बनाया गया कोण।

- **ढलान (m):** एक रेखा के झुकाव कोण की स्पर्शज्या (tangent) को उसका ढलान कहा जाता है।

- **सूत्र:**

$$m = \tan\theta$$

दो अलग-अलग बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा का ढलान

- दो दिए गए बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा के ढलान की गणना झुकाव कोण को जाने बिना की जा सकती है।

- **सूत्र:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

रेखाओं की समांतरता और लंबवतता के लिए शर्तें

- मान लीजिए कि दो रेखाओं के ढलान m_1 और m_2 हैं।
- **समांतर रेखाएं:** दो रेखाएं समांतर होती हैं यदि उनके ढलान बिल्कुल समान हों।

$$m_1 = m_2$$

- **लंबवत रेखाएं:** दो रेखाएं लंबवत होती हैं यदि उनके ढलानों का गुणनफल -1 हो।

$$m_1 \times m_2 = -1$$

अक्षों पर एक रेखा द्वारा बनाए गए अंतःखंड

- एक सीधी रेखा द्वारा x-अक्ष और y-अक्ष पर मूल बिंदु से काटी गई दूरियों को **अंतःखंड** कहा जाता है।
- यदि x-अंतःखंड a है और y-अंतःखंड b है, तो रेखा अक्षों को बिंदुओं (a, 0) और (0, b) पर प्रतिच्छेद करती है।

दो रेखाओं के बीच का कोण

- m_1 और m_2 ढलान वाली दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ उनके संबंधित ढलानों का उपयोग करके निर्धारित किया जाता है।
- **सूत्र:**

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

मूल बिंदु का स्थानांतरण

- निर्देशांक अक्षों के विन्यास या दिशा को बदले बिना मूल बिंदु (0,0) को एक नए बिंदु (h, k) पर ले जाने की प्रक्रिया को मूल **बिंदु का स्थानांतरण** कहा जाता है।
- मान लीजिए कि (x, y) पुराने निर्देशांक हैं और (X, Y) नए निर्देशांक हैं।
- **सूत्र:**

$$x = X + h \quad \text{and} \quad y = Y + k$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. बिंदुओं $P(2,-3)$और $Q(5,1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए:

$PQ=\sqrt{(5-2)^2+(1-(-3))^2}$

$PQ=\sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$PQ=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$

$PQ=5$ इकाइयाँ।

Q2. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $(4,-3)$ और $(8,5)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को 3:1 के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है।

उत्तर-

x के लिए विभाजन सूत्र का उपयोग करते हुए:

$x=\frac{(3\times8)+(1\times4)}{3+1}=\frac{24+4}{4}=7$

y के लिए विभाजन सूत्र का उपयोग करते हुए:

$y=\frac{(3\times5)+(1\times-3)}{3+1}=\frac{15-3}{4}=3$

बिंदु के निर्देशांक (7,3) हैं।

Q3. जाँच कीजिए कि क्या बिंदु (1,5), (2, 3) और (-2,-11) संरेख हैं।

उत्तर-

त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करते हुए:

$\frac{1}{2}|1(3-(-11))+2(-11-5)+(-2)(5-3)|$

$=\frac{1}{2}|1(14)+2(-16)-2(2)|$

$=\frac{1}{2}|14-32-4|=\frac{1}{2}|-22|=11$

चूँकि क्षेत्रफल 11 (0 नहीं) है, इसलिए बिंदु संरेख नहीं हैं।

Q4. बिंदुओं (3,-2) और (1,4) से होकर गुजरने वाली रेखा का ढलान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

ढलान सूत्र का उपयोग करते हुए:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{4-(-2)}{1-3}$

$m = \frac{4+2}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$

रेखा का ढलान -3 है।

Q5. उन दो रेखाओं के बीच का न्यून कोण ज्ञात कीजिए जिनके ढलान $\frac{1}{2}$ और 3 हैं।

उत्तर-

कोण सूत्र का उपयोग करते हुए:

$\tan\ \theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$\tan\ \theta = \left|\frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + (\frac{1}{2})(3)}\right| = \left|\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}\right|$

$\tan\ \theta = |-1| = 1$

चूँकि $\tan\ \theta = 1$ है, कोण $\theta = 45^\circ$ है।

2

सीधी रेखाएं

परिचय

पिछले अध्याय में, हमने निर्देशांक ज्यामिति की मूल बातों का अन्वेषण किया। इस अध्याय में, हम **सीधी रेखाओं** के बीजगणितीय निरूपण का अध्ययन करेंगे, विभिन्न मानक रूपों में उनके समीकरणों, एक दी गई रेखा से एक बिंदु की दूरी, और **समांतर** और **लंबवत** रेखाओं के परिवारों के लिए शर्तों का अन्वेषण करेंगे।

एक अक्ष के समांतर सीधी रेखा

- x-अक्ष के समांतर एक सीधी रेखा इससे एक स्थिर दूरी पर होती है।
- y-अक्ष के समांतर एक सीधी रेखा इससे एक स्थिर दूरी पर होती है।
- **सूत्र (x-अक्ष के समांतर):**

$$y = a$$

(जहाँ a, x-अक्ष से स्थिर दूरी है)

- **सूत्र (y-अक्ष के समांतर):**

$$x = b$$

(जहाँ b, y-अक्ष से स्थिर दूरी है)

विभिन्न मानक रूपों में सीधी रेखा

- एक सीधी रेखा को दिए गए मापदंडों जैसे ढलान, अंतःखंड, या गुजरने वाले बिंदुओं के आधार पर विभिन्न बीजगणितीय रूपों में दर्शाया जा सकता है।
- **ढलान-अंतःखंड रूप:** m ढलान और y-अंतःखंड c वाली रेखा का समीकरण।

$$y = mx + c$$

- **बिंदु-ढलान रूप:** m ढलान के साथ एक बिंदु (x_1, y_1) से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण।

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- **दो-बिंदु रूप:** दो बिंदुओं (x_1, y_1)और (x_2, y_2) से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण।

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- **अंतःखंड रूप:** क्रमशः x और y अक्षों पर a और b अंतःखंड बनाने वाली रेखा का समीकरण।

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- **अभिलंब रूप (लंबवत रूप):** एक रेखा का समीकरण जहाँ p मूल बिंदु से लंब की लंबाई है और α वह कोण है जो यह x-अक्ष के साथ बनाती है।

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

दो चरों में प्रथम घात का सामान्य समीकरण

- x और y में प्रथम घात का कोई भी सामान्य समीकरण हमेशा एक सीधी रेखा को दर्शाता है।
- **सामान्य समीकरण:**

$$Ax + By + C = 0$$

- **सामान्य रेखा का ढलान:**

$$m = -\frac{A}{B}$$

- **x-अंतःखंड और y-अंतःखंड:**

$$x\text{-intercept} = -\frac{C}{A}, \quad y\text{-intercept} = -\frac{C}{B}$$

एक दी गई रेखा से एक दिए गए बिंदु की दूरी

- एक रेखा $Ax + By + C = 0$ से एक बिंदु $P(x_1, y_1)$ की लंबवत दूरी d उनके बीच की सबसे छोटी दूरी होती है।
- **सूत्र:**

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- **दो समांतर रेखाओं $Ax + By + C_1 = 0$ और $Ax + By + C_2 = 0$ के बीच की दूरी:**

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

समांतर या लंबवत रेखाओं का समीकरण

समांतर रेखा: $Ax + By + C = 0$ के समांतर एक रेखा का ढलान समान होता है लेकिन स्थिरांक अलग होता है।

- **समीकरण:**

$$Ax + By + k = 0$$

(जहाँ k एक स्थिरांक है)

लंबवत रेखा: $Ax + By + C = 0$ के लंबवत एक रेखा x और y के गुणांकों की अदला-बदली करती है, और एक चिह्न बदल देती है।

- **समीकरण:**

$$Bx - Ay + k = 0$$

(जहाँ k एक स्थिरांक है)

दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर गुजरने वाली रेखाओं के परिवार का समीकरण

- दो दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर गुजरने वाली अनंत संख्या में रेखाएं **रेखाओं का एक परिवार** बनाती हैं।
- यदि $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ और $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ दो प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं, तो उनके प्रतिच्छेदन से होकर गुजरने वाली रेखाओं के परिवार का समीकरण उन्हें एक पैरामीटर k के साथ जोड़कर दिया जाता है।
- **सूत्र:**

$$(A_1x + B_1y + C_1) + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. बिंदु (2,-3) से होकर गुजरने वाली और 4 ढलान वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

बिंदु-ढलान रूप का उपयोग करते हुए:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = 4(x - 2)$$

$y + 3 = 4x - 8$

$4x - y - 11 = 0$

Q2. निर्देशांक अक्षों पर रेखा $3x + 4y = 12$ द्वारा बनाए गए अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

इसे अंतःखंड रूप में बदलने के लिए पूरे समीकरण को 12 से विभाजित करने पर:

$\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = \frac{12}{12}$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

x-अंतःखंड 4 है और y-अंतःखंड 3 है।

Q3. रेखा $4x - 3y - 8 = 0$ से बिंदु (3,-2) की लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए:

$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$d = \frac{|4(3) - 3(-2) - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$

$d = \frac{|12 + 6 - 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}}$

$d = 2$ इकाइयाँ।

Q4. $2x - 5y + 7 = 0$ के समांतर और बिंदु (1,4) से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$2x - 5y + 7 = 0$ के समांतर एक रेखा का समीकरण $2x - 5y + k = 0$ है।

चूँकि यह (1, 4) से होकर गुजरती है, $x = 1, y = 4$ प्रतिस्थापित करें:

$2(1) - 5(4) + k = 0$

$2 - 20 + k = 0$

$k = 18$

समीकरण $2x - 5y + 18 = 0$ है।

Q5. समांतर रेखाओं $3x + 4y - 5 = 0$ और $3x + 4y + 10 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

समांतर रेखाओं की दूरी के सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|-5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d = \frac{|-15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5}$$

$d = 3$ इकाइयाँ।

3

वृत्त

परिचय

वृत्त निर्देशांक ज्यामिति में सबसे मौलिक आकारों में से एक है। इस अध्याय में, हम मानक रूप, सामान्य रूप और व्यासीय रूप सहित विभिन्न रूपों में एक वृत्त के बीजगणितीय समीकरण का अध्ययन करेंगे, और सीखेंगे कि इन समीकरणों से इसके केंद्र और त्रिज्या की गणना कैसे करें।

मानक रूप में वृत्त का समीकरण

- एक **वृत्त** एक ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है जो एक तल में इस प्रकार चलता है कि एक निश्चित बिंदु से इसकी दूरी स्थिर रहती है।
- इस निश्चित बिंदु को **केंद्र** कहा जाता है और स्थिर दूरी को **त्रिज्या** कहा जाता है।
- यदि वृत्त का केंद्र (h, k) है और इसकी त्रिज्या r है, तो समीकरण को मानक रूप (या केंद्रीय रूप) में लिखा जाता है।
- **सूत्र:**

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- यदि केंद्र बिल्कुल **मूल बिंदु** (0, 0) पर स्थित है, तो समीकरण सरल हो जाता है।
- **सूत्र:**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

वृत्त का सामान्य समीकरण

- मानक रूप का विस्तार करने पर, हमें बीजगणितीय निरूपण प्राप्त होता है जिसे **वृत्त का सामान्य समीकरण** कहा जाता है।
- यह x और y में दो घात का समीकरण है जहाँ x^2 और y^2 के गुणांक बिल्कुल समान होते हैं, और कोई xy पद नहीं होता है।
- **सामान्य समीकरण:**

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

- इस सामान्य समीकरण के लिए, **केंद्र** के निर्देशांक x और y के गुणांकों का आधा भाग विपरीत चिह्नों के साथ लेकर निर्धारित किए जाते हैं।
- **केंद्र का सूत्र:**

$$(-g, -f)$$

- वृत्त की **त्रिज्या** r की गणना स्थिरांक g, f, और c का उपयोग करके की जाती है।
- **त्रिज्या का सूत्र:**

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

व्यासीय रूप में वृत्त का समीकरण

- जब वृत्त के व्यास के दो अंतिम बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हों, तो हम पहले केंद्र या त्रिज्या ज्ञात किए बिना सीधे इसका समीकरण ज्ञात कर सकते हैं।
- मान लीजिए कि व्यास के दिए गए अंतिम बिंदु (x_1, y_1)और (x_2, y_2) हैं।
- यह सूत्र इस ज्यामितीय गुण पर आधारित है कि अर्धवृत्त के किसी भी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण एक समकोण होता है।
- **सूत्र:**

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2,-3) है और त्रिज्या 5 है।

उत्तर-

मानक रूप का उपयोग करते हुए:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Q2. वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

सामान्य समीकरण के साथ तुलना करने पर

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0:$

$2g = -6 \Rightarrow g = -3$

$2f = 4 \Rightarrow f = 2$

$c = -12$

केंद्र $(-g, -f)$ (3,-2) है।

त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 - (-12)}$

$r = \sqrt{9 + 4 + 12} = \sqrt{25}$

केंद्र =(3,-2) और त्रिज्या =5 इकाइयाँ।

Q3. मूल बिंदु (0,0) से होकर गुजरने वाले और (3, 4) पर केंद्र वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

चूँकि वृत्त (0, 0) से होकर गुजरता है, त्रिज्या केंद्र (3, 4) से मूल बिंदु की दूरी है।

$r = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

मानक रूप का उपयोग करते हुए:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Q4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ व्यास के अंतिम बिंदु (1, 2) और (3,4) हैं।

उत्तर-

व्यासीय रूप का उपयोग करते हुए:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y - 4) = 0$$

$$(x^2 - 3x - x + 3) + (y^2 - 4y - 2y + 8) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 + y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$$

Q5. वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 8x + 10y - 3 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

x^2 और y^2 के गुणांकों को 1 बनाने के लिए पूरे समीकरण को 2 से विभाजित करने पर:

$$x^2 + y^2 - 4x + 5y - \frac{3}{2} = 0$$

यहाँ, $g = -2$, $f = \frac{5}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$ है।

त्रिज्या

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (\frac{5}{2})^2 - (-\frac{3}{2})}$$

$$r = \sqrt{4 + \frac{25}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{16+25+6}{4}} = \sqrt{\frac{47}{4}}$$

$= \frac{\sqrt{47}}{2}$ इकाइयाँ।

4

शांकव परिच्छेद

परिचय

शांकव परिच्छेद एक समतल के साथ लंब वृत्तीय शंकु को प्रतिच्छेदित करके प्राप्त किए गए मौलिक ज्यामितीय वक्र हैं। इस अध्याय में, हम परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय की परिभाषाओं, मानक समीकरणों और प्रमुख गुणों का अध्ययन करेंगे। इन गणितीय वक्रों का भौतिकी, खगोल विज्ञान और इंजीनियरिंग में व्यापक उपयोग होता है।

शंकु के परिच्छेद

- जब एक समतल एक दोहरे लंब वृत्तीय शंकु को प्रतिच्छेद करता है, तो विभिन्न 2-आयामी वक्र बनते हैं जिन्हें **शांकव परिच्छेद** कहा जाता है।
- समतल और शंकु के अक्ष के बीच प्रतिच्छेदन के विशिष्ट कोण के आधार पर, परिणामी परिच्छेद एक **वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय या अतिपरवलय** होते हैं।

परवलय

- **परवलय** एक तल में एक ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है जिसकी एक निश्चित बिंदु (नाभि) से दूरी एक निश्चित सीधी रेखा (नियता) से इसकी दूरी के बिल्कुल बराबर होती है।
- **मानक समीकरण (दाहिनी ओर का परवलय):**

$$y^2 = 4ax$$

- **नाभि के निर्देशांक:**

$$(a, 0)$$

- **नियता का समीकरण:**

$$x = -a$$

- **नाभिलंब** वह जीवा है जो नाभि से होकर गुजरती है और परवलय के अक्ष के लंबवत होती है।

- **नाभिलंब की लंबाई:**

$$\text{नाभिलंब} = 4a$$

दीर्घवृत्त

- **दीर्घवृत्त** एक ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है जिसकी दो निश्चित बिंदुओं (नाभियों) से दूरियों का योग हमेशा स्थिर रहता है।
- **मानक समीकरण:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

- **उत्केंद्रता (e):** केंद्र से नाभि की दूरी और केंद्र से शीर्ष की दूरी का अनुपात। दीर्घवृत्त के लिए, $e < 1$.
- **उत्केंद्रता का सूत्र:**

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

- **नाभियों के निर्देशांक:**

$$(\pm ae, 0)$$

- **नाभिलंब की लंबाई:**

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a}$$

अतिपरवलय

- **अतिपरवलय** एक ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है जिसकी दो निश्चित बिंदुओं (नाभियों) से दूरियों का अंतर हमेशा स्थिर रहता है।
- **मानक समीकरण:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **उत्केंद्रता (e):** अतिपरवलय के लिए, उत्केंद्रता हमेशा 1 से अधिक होती है ($e>1$)।
- **उत्केंद्रता का सूत्र:**

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

- **नाभियों के निर्देशांक:**

$$(\pm ae, 0)$$

- **नाभिलंब की लंबाई:**

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a}$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. परवलय $y^2 = 16x$ की नाभि के निर्देशांक और नाभिलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$y^2 = 16x$ की मानक समीकरण $y^2 = 4ax$ से तुलना करने पर:

$4a = 16 \Rightarrow a = 4$

नाभि (a, 0) है और नाभिलंब की लंबाई 4a है।

नाभि =(4,0) और नाभिलंब =16 इकाइयाँ।

Q2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ की उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ तुलना करने पर हमें $a^2 = 25$ और $b^2 = 9$ प्राप्त होता है।

उत्केंद्रता के सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}}$$

$$e = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Q3. शीर्षों (±3, 0) और नाभियों (±5, 0) वाले अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

यहाँ, शीर्ष $(\pm a, 0) \Rightarrow a = 3$ हैं, इसलिए $a^2 = 9$ है।

नाभियाँ $(\pm c, 0) \Rightarrow c = 5$ हैं।

अतिपरवलय के लिए, $c^2 = a^2 + b^2$;

$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का उपयोग करते हुए:

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Q4. नाभि (2, 0) और नियता $x = -2$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

चूँकि नाभि $(a, 0) = (2, 0)$ है और नियता $x = -a = -2$ है, परवलय $y^2 = 4ax$ के रूप का है।

यहाँ, $a = 2$ है।

a का मान प्रतिस्थापित करने पर:

$y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$

Q5. दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ के नाभिलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

इसे मानक रूप में बदलने के लिए पूरे समीकरण को 36 से विभाजित करने पर:

$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

यहाँ, $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, और

नाभिलंब की लंबाई $= \frac{2b^2}{a}$:

$b^2 = 4$

$\frac{2(4)}{3}$

$\Rightarrow \frac{8}{3}$

5

आव्यूह

परिचय

19वीं शताब्दी के मध्य में, **आर्थर केली** ने युगपत समीकरण प्रणालियों को निरूपित करने के लिए **आव्यूह** नामक गणित की एक नई शाखा बनाई। आज, आव्यूहों का व्यापक रूप से गेम थ्योरी, अर्थशास्त्र, बजटिंग और विभिन्न वैज्ञानिक क्षेत्रों में जटिल रैखिक समीकरणों को कुशलतापूर्वक हल करने में उपयोग किया जाता है।

आव्यूह और इसकी कोटि

- एक **आव्यूह** संख्याओं या फलनों का एक क्रमित आयताकार विन्यास (array) है जो कोष्ठक [या () में संलग्न होता है। अंदर की संख्याओं को अवयव (elements) कहा जाता है।
- अवयवों की क्षैतिज रेखाओं को **पंक्तियाँ** (Rows) कहा जाता है, और ऊर्ध्वाधर रेखाओं को **स्तंभ** (Columns) कहा जाता है।
- यदि एक आव्यूह में m पंक्तियाँ और n स्तंभ हैं, तो इसकी कोटि (Order) को $m \times n$ ('m गुणा n' के रूप में पढ़ा जाता है) के रूप में लिखा जाता है।
- **उदाहरण:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

यह 3×2 कोटि का एक आव्यूह है क्योंकि इसमें 3 पंक्तियाँ और 2 स्तंभ हैं।

आव्यूह के प्रकार

1. पंक्ति आव्यूह: एक आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति होती है।

- **Example:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ (Order 1×3)

2. स्तंभ आव्यूह: एक आव्यूह जिसमें केवल एक स्तंभ होता है।

- **Example:** $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ (Order 3×1)

3. वर्ग आव्यूह: एक आव्यूह जहाँ पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर होती है $(m = n)$।

- **Example:** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (Order 2×2)

4. आयताकार आव्यूह: एक आव्यूह जहाँ पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर नहीं होती है $(m \neq n)$।

- **Example:** $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (Order 2×3)

5. विकर्ण आव्यूह: एक वर्ग आव्यूह जहाँ सभी गैर-विकर्ण अवयव बिल्कुल शून्य होते हैं।

- **Example:** $E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

6. अदिश आव्यूह: एक विकर्ण आव्यूह जहाँ सभी विकर्ण अवयव बिल्कुल समान होते हैं।

- **Example:** $F = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

7. इकाई (तत्समक) आव्यूह: एक अदिश आव्यूह जहाँ सभी विकर्ण अवयव बिल्कुल 1 होते हैं। इसे I द्वारा निरूपित किया जाता है।

- **Example:** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. शून्य (रिक्त) आव्यूह: एक आव्यूह जहाँ प्रत्येक अवयव शून्य होता है। इसे O द्वारा निरूपित किया जाता है।

- **Example:** $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

दो आव्यूहों की समानता

दो आव्यूह A और B केवल तभी **समान** (A = B) होते हैं जब उनकी कोटि बिल्कुल समान हो और उनके संगत अवयव बिल्कुल समान हों $(a_{ij} = b_{ij})$।

उदाहरण: यदि $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ है, तो $x = 5$ और $y = 7$ है।

आव्यूहों का योग और व्यवकलन

- आव्यूहों को केवल तभी जोड़ा या घटाया जा सकता है जब उनकी **कोटि बिल्कुल समान हो**।

- **योग:** संगत अवयवों को जोड़ें। ($C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$)
- **व्यवकलन:** संगत अवयवों को घटाएं। ($C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$)
- **योग के गुण:** आव्यूह योग क्रमविनिमेय ($A + B = B + A$) और साहचर्य ($(A + B) + C = A + (B + C)$).
- **Example:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

एक अदिश द्वारा आव्यूह का गुणन

जब किसी आव्यूह को एक अदिश (एक अचर संख्या) k से गुणा किया जाता है, तो आव्यूह के अंदर का प्रत्येक अवयव k से गुणा हो जाता है।

- **Formula:**

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

- **Example:**

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

दो आव्यूहों का गुणन

- दो आव्यूहों A और B को गुणा करके AB केवल तभी बनाया जा सकता है जब **A में स्तंभों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो**।
- यदि आव्यूह A की कोटि $m \times n$ है और आव्यूह B की कोटि $n \times p$ है, तो परिणामी आव्यूह AB की कोटि $m \times p$ होगी।
- हम पहले आव्यूह की पंक्तियों को दूसरे आव्यूह के संगत स्तंभों से गुणा करते हैं और गुणनफलों को जोड़ते हैं।
- **गुण:** आव्यूह गुणन सामान्यतः **क्रमविनिमेय** नहीं होता है ($AB \neq BA$) लेकिन यह साहचर्य होता है ($(AB)C = A(BC)$)।
- **उदाहरण:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (2 \times 1) \\ (3 \times 2) + (4 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

आव्यूह का परिवर्त

- एक आव्यूह A का **परिवर्त** उसकी पंक्तियों और स्तंभों को आपस में बदलकर प्राप्त किया जाता है। इसे A' या A^T द्वारा निरूपित किया जाता है।
- यदि आव्यूह A की कोटि $m \times n$ है, तो A' की कोटि $n \times m$ हो जाती है।
- **गुण:** $(A')' = A, (A+B)' = A' + B'$, और $(AB)' = B'A'$.

उदाहरण: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ है, तो $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ है।

सममित और विषम-सममित आव्यूह

सममित आव्यूह:

एक वर्ग आव्यूह A सममित होता है यदि यह बिल्कुल अपने परिवर्त के बराबर हो $(A = A')$। इसके अवयव $a_{ij} = a_{ji}$ को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ध्यान दें $A = A'$)

विषम-सममित आव्यूह:

एक वर्ग आव्यूह A विषम-सममित होता है यदि यह अपने परिवर्त के ऋणात्मक के बराबर हो $(A = -A')$। इसके सभी मुख्य विकर्ण अवयव शून्य होते हैं, और $a_{ij} = -a_{ji}$ होता है।

उदाहरण: $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

प्रमेय: किसी भी वर्ग आव्यूह को इस सूत्र का उपयोग करके एक सममित और एक विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A').$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = 2i - j$ द्वारा दिए गए हैं।

उत्तर-

i और j के मान (1 और 2) प्रतिस्थापित करने पर:

$a_{11} = 2(1) - 1 = 1$

$a_{12} = 2(1) - 2 = 0$

$a_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$a_{22} = 2(2) - 2 = 2$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Q2. a और b के मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 5 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ है।

उत्तर-

संगत अवयवों को बराबर करने पर:

$a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a$

$ab = 8$

b को प्रतिस्थापित करने पर:

$a(6 - a) = 8$

$6a - a^2 = 8 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$

गुणनखंड करने पर: $(a - 4)(a - 2) = 0$

$a = 4$ या $a = 2$।

यदि $a = 4$ है, तो $b = 2$ है। यदि $a = 2$ है, तो $b = 4$ है।

$a = 4, b = 2$ या $a = 2, b = 4$

Q3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो $3A - B$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

सबसे पहले, 3A ज्ञात करें:

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

अब B घटाएं:

$$3A - B = \begin{bmatrix} 6-1 & 12-3 \\ 9-(-2) & 6-5 \end{bmatrix}$$

$$3A - B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Q4. गुणनफल AB ज्ञात कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ है।

उत्तर-

A, 2×2 का है और B, 2×3 का है। परिणाम 2×3 का होगा।

$$c_{11} = (1)(1) + (-2)(2) = 1 - 4 = -3$$

$$c_{12} = (1)(2) + (-2)(3) = 2 - 6 = -4$$

$$c_{13} = (1)(3) + (-2)(1) = 3 - 2 = 1$$

$$c_{21} = (2)(1) + (3)(2) = 2 + 6 = 8$$

$$c_{22} = (2)(2) + (3)(3) = 4 + 9 = 13$$

$$c_{23} = (2)(3) + (3)(1) = 6 + 3 = 9$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

Q5. **आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को एक सममित और एक विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।**

उत्तर-

A' ज्ञात करें:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

सममित भाग $P = \frac{1}{2}(A + A');$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

विषम-सममित भाग $Q = \frac{1}{2}(A - A');$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

6

सारणिक

परिचय

प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक अद्वितीय संख्या से जुड़ा होता है जिसे आव्यूह का **सारणिक** कहा जाता है। इस अध्याय में, हम सारणिकों के विभिन्न गुणों को सीखेंगे और विभिन्न विधियों द्वारा सारणिकों का मान भी ज्ञात करेंगे। यह अवधारणा रैखिक समीकरणों की प्रणालियों को हल करने और आव्यूहों का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए महत्वपूर्ण है।

कोटि 2 का सारणिक

- एक 2×2 आव्यूह के सारणिक का मान यह निर्धारित करता है कि रैखिक समीकरणों की प्रणाली को हल करते समय x और y के मान मौजूद हैं या नहीं।
- संख्या $a_1b_2 - a_2b_1$ सारणिक का मान है।
- **सूत्र:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

कोटि 2 के सारणिक का विस्तार

- सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ में, अवयवों को तिरछे गुणा करें।
- नीचे की ओर तीर का चिह्न धनात्मक $(a_{11}a_{22})$ होता है, और ऊपर की ओर तीर का चिह्न ऋणात्मक $(-a_{21}a_{12})$ होता है।
- **सूत्र:**

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- **उदाहरण:**

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (6 \times 2) - (8 \times 4) = 12 - 32 = -20$$

कोटि 3 का सारणिक

- कोटि 3 के एक सारणिक में 3 पंक्तियों और 3 स्तंभों में नौ राशियाँ होती हैं।
- इसमें $(3)^2 = 9$ अवयव होते हैं।
- इसे प्रायः Δ या $|A|$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

एक वर्ग आव्यूह का सारणिक

- संख्याओं के प्रत्येक वर्ग आव्यूह के साथ, हम **आव्यूह का एक सारणिक** जोड़ते हैं।
- एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य होता है, **अव्युत्क्रमणीय आव्यूह** (Singular Matrix) कहलाता है।
- एक इकाई आव्यूह I का सारणिक बिल्कुल 1 होता है।
- **उदाहरण:**

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ है तो } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 6 = 15 - 6 = 9 \text{ है।}$$

कोटि 3 के सारणिक का विस्तार

- किसी भी पंक्ति या स्तंभ का उपयोग करके सारणिक का विस्तार किया जा सकता है।
- अवयवों को वैकल्पिक रूप से धनात्मक और ऋणात्मक चिह्न दिए जाते हैं, जो a_{11} के लिए धनात्मक चिह्न से शुरू होते हैं।
- यदि पादांकों (subscripts) का योग सम है, तो एक धनात्मक चिह्न दें; यदि विषम है, तो एक ऋणात्मक चिह्न दें।
- **उदाहरण:**

$$\text{पहली पंक्ति का उपयोग करके } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ का विस्तार करने पर:}$$

$$= 1(20 - 2) - 2(10 - 3) + 3(4 - 12) = 18 - 14 - 24 = -20$$

उपसारणिक और सहखंड

|A| में a_{ij} का उपसारणिक:

- किसी अवयव का उपसारणिक उस पंक्ति और स्तंभ को हटाने के बाद प्राप्त सारणिक का मान होता है जिसमें वह अवयव होता है। इसे M_{ij} द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण: $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ में a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (6 \times 8) - (3 \times 0) = 48$ है।

|A| में a_{ij} का सहखंड:

- किसी अवयव a_{ij} का सहखंड a_{ij} का उपसारणिक होता है जिसे $(-1)^{i+j}$ से गुणा किया जाता है। इसे C_{ij} द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **सूत्र:**

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- **उदाहरण:** a_{21} का सहखंड (उपरोक्त उपसारणिक से) $C_{21} = (-1)^{2+1}(48) = -48$ है।

सारणिकों के गुण

- **गुण 1:** सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है यदि इसकी पंक्तियों और स्तंभों को आपस में बदल दिया जाए $(\Delta = \Delta')$।
- **गुण 2:** यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियों (या स्तंभों) को आपस में बदल दिया जाए, तो सारणिक का मान केवल चिह्न में बदलता है $(\Delta' = -\Delta)$।
- **गुण 3:** यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (या स्तंभ) समान हैं, तो सारणिक का मान शून्य होता है।
- **गुण 4:** यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को समान अचर k से गुणा किया जाता है, तो सारणिक का मान उस अचर k से गुणा हो जाता है।

  उपप्रमेय: यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (या स्तंभ) समानुपाती हैं, तो इसका मान शून्य होता है।

- **गुण 5:** यदि किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को दो पदों के योग के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो सारणिक को दो सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

- **गुण 6:** सारणिक का मान नहीं बदलता है यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव में किसी अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के संगत अवयवों के समान गुणज जोड़े जाएं।

गुणों का उपयोग करके एक सारणिक का मान ज्ञात करना

- सरलीकरण का उद्देश्य विस्तार करने से पहले गुणों का उपयोग करके एक पंक्ति (या स्तंभ) में अधिकतम संभव शून्य बनाना है।

- **उदाहरण:**

दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$ है।

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा, C_1 बन जाता है $1 + w + w^2$ जो 0 के बराबर है। इस प्रकार सारणिक 0 है।

सारणिकों के अनुप्रयोग

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल:

- शीर्षों $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ और (x_3, y_3) वाले त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना एक सारणिक का उपयोग करके की जाती है।

- **सूत्र:**

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. तीन बिंदुओं की संरेखता की शर्त:

- तीन बिंदु A, B, C **संरेख** होते हैं यदि उनके द्वारा बनाए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल बिल्कुल 0 हो।

3. दिए गए दो बिंदुओं से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण:

- बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण क्षेत्रफल के सूत्र में एक सामान्य बिंदु (x, y) को प्रतिस्थापित करके और शून्य के बराबर करके दिया जाता है।

- **सूत्र:**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ है।

उत्तर-

सारणिक का विस्तार करने पर:

$(x-3)(x+3) - x(x+1) = 6$

$(x^2 - 9) - (x^2 + x) = 6$

$-x - 9 = 6$

$x = -15$

Q2. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ में अवयव 5 का उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

अवयव 5, a_{21} स्थिति पर है।

उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (6 \times 8) - (3 \times 0) = 48$ है।

सहखंड $C_{21} = (-1)^{2+1} \times 48 = -48$ है।

उपसारणिक = 48, सहखंड = -48

Q3. पहली पंक्ति के अनुदिश विस्तार करके सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

पहली पंक्ति के विस्तार का उपयोग करते हुए:

$= 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(20 - 2) - 2(10 - 3) + 3(4 - 12)$

$= 18 - 14 - 24$

मान -20 है।

Q4. शीर्षों $P(5,4), Q(-2,4)$ और $R(2,-6)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

क्षेत्रफल के लिए सारणिक सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$\begin{array}{ccc} & 5 & 4 & 1 \\ Area = \frac{1}{2}| & -2 & 4 & 1| \\ & 2 & -6 & 1 \end{array}$$

$= \frac{1}{2}[5(4-(-6)) - 4(-2-2) + 1(12-8)]$

$= \frac{1}{2}[50 + 16 + 4] = \frac{70}{2}$

क्षेत्रफल = 35 वर्ग इकाइयाँ।

Q5. सारणिकों का उपयोग करके बिंदुओं $(1,3)$ और $(2,1)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए कि रेखा पर P(x,y) कोई बिंदु है। चूँकि बिंदु संरेख हैं, क्षेत्रफल का सारणिक शून्य है:

$$\begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ |1 & 3 & 1| = 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$x(3-1) - y(1-2) + 1(1-6) = 0$

$2x + y - 5 = 0$

7

एक आव्यूह का व्युत्क्रम और इसके अनुप्रयोग

परिचय

पिछले अध्यायों में, हमने आव्यूहों, सारणिकों और उनके मूल संक्रियाओं के बारे में सीखा। इस अध्याय में, हम एक आव्यूह का सहखंडज ज्ञात करना और इसका उपयोग करके एक वर्ग **आव्यूह का व्युत्क्रम** ज्ञात करना सीखेंगे। इसके अलावा, हम इन अवधारणाओं का उपयोग रैखिक समीकरणों की प्रणालियों को हल करने और उनकी संगतता की जाँच करने के लिए करेंगे।

एक वर्ग आव्यूह का सहखंडज

- मान लीजिए A एक वर्ग आव्यूह है। एक आव्यूह A का सहखंडज उसके अवयवों के सहखंडों से बने **आव्यूह का परिवर्त** होता है।
- इसे **Adj A** द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **सूत्र:**

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

- **उदाहरण:**

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

सहखंड: $C_{11} = 4, C_{12} = -1, C_{21} = -3, C_{22} = 2$।

सहखंडों का आव्यूह = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$।

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$।

एक आव्यूह का व्युत्क्रम

- एक वर्ग आव्यूह A **व्युत्क्रमणीय** कहलाता है यदि एक अन्य वर्ग आव्यूह B इस प्रकार मौजूद है कि $AB = BA = I$ (तत्समक आव्यूह)।
- आव्यूह B को A का **व्युत्क्रम** कहा जाता है और इसे A^{-1} द्वारा निरूपित किया जाता है।
- एक आव्यूह का व्युत्क्रम केवल तभी मौजूद होता है जब यह एक **व्युत्क्रमणीय** आव्यूह हो (अर्थात, $|A| \neq 0$)।

- **सूत्र:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A$$

- **उदाहरण:**

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।
$|A| = (2 \times 3) - (5 \times 1) = 6 - 5 = 1$। चूँकि $|A| \neq 0$ है, A^{-1} मौजूद है।
$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$।
$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$।

रैखिक समीकरणों की प्रणाली का हल

- रैखिक समीकरणों की एक प्रणाली को **आव्यूह रूप** में $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है।
- हाँ, A गुणांकों का आव्यूह है, X चरों का स्तंभ आव्यूह है, और B अचरों का स्तंभ आव्यूह है।
- प्रणाली का हल दोनों पक्षों को A के व्युत्क्रम से गुणा करके ज्ञात किया जाता है।
- **सूत्र:**

$$X = A^{-1}B$$

- **उदाहरण:**

हल कीजिए: $x + 2y = 4$ और $2x + 5y = 9$।
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$।
$|A| = 5 - 4 = 1$। $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$।
$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$।
$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 18 \\ -8 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$।
इसलिए, $x = 2, y = 1$ है।

समीकरणों की एक प्रणाली की संगतता के लिए मापदंड

- समीकरणों की एक प्रणाली **संगत** होती है यदि इसका एक या अधिक वैध हल हो।
- समीकरणों की एक प्रणाली **असंगत** होती है यदि इसका कोई हल न हो।

- **शर्त 1 (अद्वितीय हल):** यदि $|A| \neq 0$ है, तो प्रणाली संगत है और इसका एक अद्वितीय हल है।
- **शर्त 2 (कोई हल नहीं):** यदि $|A| = 0$ और $(\text{Adj } A)\, B \neq O$ (शून्य आव्यूह) है, तो प्रणाली असंगत है।
- **शर्त 3 (अनंत हल):** यदि $|A| = 0$ और $(\text{Adj } A)\, B = O$, the system is consistent and has infinitely many solutions.
- **उदाहरण:**

  $2x + 3y = 5$ और $4x + 6y = 10$ की संगतता की जाँच कीजिए।

  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$।

  $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$।

  $(\text{Adj } A)B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - 30 \\ -20 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$।

  चूँकि $|A| = 0$ और $(\text{Adj } A)B = O$ है, प्रणाली के अनंत हल हैं (संगत)।

TOP 5 QUESTIONS

Q1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

A के सहखंड ज्ञात करें:

$C_{11} = 4, C_{12} = -3$

$C_{21} = 2, C_{22} = 1$

सहखंड आव्यूह बनाएं और इसका परिवर्त लें।

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Q2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

सारणिक की गणना करें:

$|A| = (2 \times 3) - (-1 \times 1) = 6 + 1 = 7$

चूँकि $|A| \neq 0$ है, व्युत्क्रम मौजूद है।

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A$

$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Q3. आव्यूह विधि का उपयोग करके समीकरणों की प्रणाली को हल कीजिए: $5x + 2y = 4$ और $7x + 3y = 5$।

उत्तर-

आव्यूह रूप $AX = B$: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$।

$$|A| = 15 - 14 = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix}$$

x = 2, y = -3

Q4. निर्धारित कीजिए कि क्या प्रणाली संगत है: $x + 2y = 4$ और $2x + 4y = 7$ ।

उत्तर-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$।

$$|A| = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{Adj } A)B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 - 14 \\ -8 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

चूँकि $(\text{Adj } A)B \neq O$ है।

प्रणाली असंगत है (कोई हल नहीं)।

Q5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि $A\,(Adj\ A) = |A|I$ है।

उत्तर-

$|A| = 4 - 3 = 1$। इसलिए, $|A|I = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$।

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 3 & -6 + 6 \\ 2 - 2 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः सत्यापित हुआ, A(Adj A) = |A|I.

8

त्रि-आयामी ज्यामिति का परिचय

परिचय

त्रि-आयामी ज्यामिति द्वि-आयामी निर्देशांक ज्यामिति की अवधारणाओं को वास्तविक भौतिक दुनिया में विस्तारित करती है। इस अध्याय में, हम सीखेंगे कि तीन अक्षों का उपयोग करके अंतरिक्ष में बिंदुओं का पता कैसे लगाया जाए, उनके बीच की दूरियों की गणना कैसे की जाए, विभाजन सूत्रों को कैसे लागू किया जाए, और दिक्-कोज्याओं और दिक्-अनुपातों की महत्वपूर्ण अवधारणाओं को कैसे समझा जाए।

निर्देशांक प्रणाली और अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक

- **मूल बिंदु** $O(0,0,0)$ पर प्रतिच्छेद करने वाली तीन परस्पर लंबवत रेखाएं आयताकार निर्देशांक अक्ष बनाती हैं: x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष।
- ये तीन अक्ष परस्पर अंतरिक्ष को आठ अलग-अलग कक्षों में विभाजित करते हैं जिन्हें **अष्टांश** के रूप में जाना जाता है।
- अंतरिक्ष में किसी भी बिंदु P के निर्देशांक विशिष्ट रूप से एक क्रमित त्रिक (x, y, z) द्वारा दर्शाए जाते हैं।
- निर्देशांक तल xy-तल (जहाँ $z = 0$), yz-तल (जहाँ $x = 0$), और zx-तल (जहाँ $y = 0$) हैं।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी

- किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी d 3D दूरी सूत्र का उपयोग करके निर्धारित की जाती है।
- **सूत्र:**

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- **मूल बिंदु** $(0,0,0)$ से एक बिंदु $P(x, y, z)$ की दूरी की गणना$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- **उदाहरण:** बिंदुओं $(2,5,-4)$ और $(8,2,-6)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (2-5)^2 + \left(-6 - (-4)\right)^2}$$

$$d = \sqrt{(36 + 9 + 4)} = \sqrt{49} = 7\ units$$

एक रेखाखंड के विभाजन बिंदु के निर्देशांक

1. आंतरिक विभाजन:

बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु $R(x, y, z)$ के निर्देशांक।

- **सूत्र:**

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1z_2 + m_2z_1}{m_1 + m_2}$$

2. बाह्य विभाजन:

यदि बिंदु R रेखाखंड को बाह्य रूप से विभाजित करता है, तो आंतरिक विभाजन सूत्र में '+' चिह्न को '-' चिह्न से बदल दें।

- **सूत्र:**

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}, \quad z = \frac{m_1z_2 - m_2z_1}{m_1 - m_2}$$

3. मध्य-बिंदु सूत्र:

जब बिंदु रेखाखंड को ठीक आधे हिस्से में विभाजित करता है $(m_1 = m_2 = 1)$।

- **सूत्र:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

एक रेखा की दिक्-कोज्याएं और दिक्-अनुपात

1. दिक्-कोज्याएं (l, m, n):

उन कोणों α, β, γ की कोज्याएं जो एक निर्देशित रेखा क्रमशः x, y और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाती है।

- **सूत्र:**

$$l = cos\,\alpha, \quad m = cos\,\beta, \quad n = cos\,\gamma$$

- **मूलभूत संबंध:** किसी भी रेखा की दिक्-कोज्याओं के वर्गों का योग हमेशा बिल्कुल 1 होता है।

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

2. दिक्-अनुपात (a, b, c):

कोई भी तीन संख्याएं जो एक रेखा की दिक्-कोज्याओं l, m, n के समानुपाती होती हैं।

- **दिक्-कोज्याओं के साथ संबंध:**

$$l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **उदाहरण:** एक रेखा की दिक्-कोज्याएं ज्ञात कीजिए जिसके दिक्-अनुपात $2, -1, -2$ हैं।

  यहाँ $a = 2, b = -1, c = -2,$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

  दिक्-कोज्याएं $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ हैं।

एक रेखा पर एक रेखाखंड का प्रक्षेप

- दिक्-कोज्याओं l, m, n वाली एक दी गई सीधी रेखा पर दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड का **प्रक्षेप।**

- **सूत्र:**

$$\text{प्रक्षेप} = |l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)|$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. बिंदुओं $A(2,3,5)$ और $B(4,3,1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

3D दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2}$$

$$AB = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$$

दूरी $= 2\sqrt{5}$ इकाइयाँ।

Q2. $(1, -2, 3)$ **और** $(3, 4, -1)$ **को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।**

उत्तर-

मध्य-बिंदु सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

मध्य-बिंदु (2, 1, 1) है।

Q3. एक रेखा की दिक्-कोज्याएं ज्ञात कीजिए यदि यह क्रमशः x, y और z अक्षों के साथ $90^\circ, 60^\circ$ **और** 30° **का कोण बनाती है।**

उत्तर-

यहाँ कोण $\alpha = 90^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$ हैं।

$$l = cos\ 90^\circ = 0$$

$$m = cos\ 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$n = cos\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

दिक्-कोज्याएं $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ हैं।

Q4. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो $(1, -2, 3)$ **और** $(3, 4, -5)$ **को मिलाने वाली रेखा को आंतरिक रूप से** $2:3$ **के अनुपात में विभाजित करता है।**

उत्तर-

आंतरिक विभाजन सूत्र $(m_1 = 2, m_2 = 3)$ का उपयोग करते हुए:

$x = \frac{2(3)+3(1)}{2+3} = \frac{6+3}{5} = \frac{9}{5}$

$y = \frac{2(4)+3(-2)}{2+3} = \frac{8-6}{5} = \frac{2}{5}$

$z = \frac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \frac{-10+9}{5} = -\frac{1}{5}$

बिंदु $(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ है।

Q5. एक रेखा की दिक्-कोज्याएं ज्ञात कीजिए जिसके दिक्-अनुपात 1, 2, 3 हैं।

उत्तर-

यहाँ a=1, b=2, c=3 है।

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ज्ञात करें:

$= \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

प्रत्येक दिक्-अनुपात को $\sqrt{14}$ से विभाजित करें:

दिक्-कोज्याएं $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ हैं।

9

सदिश

परिचय

दिन-प्रतिदिन के जीवन में, दूरी और गति जैसी भौतिक राशियाँ स्थिति में परिवर्तन का वर्णन करती हैं। हालाँकि, विस्थापन या वेग का सटीक वर्णन करने के लिए, हमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी निर्दिष्ट करनी चाहिए। यह अध्याय **सदिशों**, उनके प्रकारों, योग जैसी संक्रियाओं, विभाजन सूत्रों, दिक्-कोज्याओं और सदिश गुणनफलों को पेश करता है ताकि स्थितियों की सटीक भविष्यवाणी की जा सके।

अदिश और सदिश

1. **अदिश:** एक भौतिक राशि जिसे केवल एक संख्या (केवल परिमाण) द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

- उदाहरण: समय, द्रव्यमान, लंबाई, गति, तापमान, आयतन, ऊष्मा की मात्रा, किया गया कार्य।

2. **सदिश:** एक भौतिक राशि जिसमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है।

- उदाहरण: विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार।

सदिश एक दिष्ट रेखाखंड के रूप में

- एक विशिष्ट दिशा के साथ एक रेखाखंड को **दिष्ट रेखाखंड** कहा जाता है।
- वह बिंदु A जहाँ से सदिश शुरू होता है उसे **प्रारंभिक बिंदु** कहा जाता है और बिंदु B जहाँ यह समाप्त होता है उसे **अंतिम बिंदु** कहा जाता है।
- रेखाखंड AB की लंबाई को सदिश का परिमाण या मापांक कहा जाता है, जिसे $|\overrightarrow{AB}|$ या $\vec{a}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

सदिशों का वर्गीकरण

- **शून्य सदिश:** एक सदिश जिसका परिमाण बिल्कुल शून्य होता है और जिसकी कोई निश्चित दिशा नहीं होती है। इसे $\vec{0}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

- **इकाई सदिश:** एक सदिश जिसका परिमाण बिल्कुल एक ($|\vec{a}| = 1$) होता है। $\vec{a}$ की दिशा में एक इकाई सदिश को $\hat{a}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **समान सदिश:** दो सदिश समान होते हैं यदि उनका परिमाण बिल्कुल समान हो और दिशा बिल्कुल समान हो।
- **समदिश सदिश:** सदिश जिनकी दिशा समान होती है, चाहे उनका परिमाण कुछ भी हो, समदिश सदिश कहलाते हैं।
- **एक सदिश का ऋणात्मक:** एक सदिश जिसका परिमाण दिए गए सदिश के समान होता है लेकिन दिशा विपरीत होती है। इसे $-\vec{a}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **सह-प्रारंभिक सदिश:** दो या अधिक सदिश जिनका प्रारंभिक बिंदु बिल्कुल समान होता है, सह-प्रारंभिक सदिश कहलाते हैं।
- **संरेख सदिश:** दो या अधिक सदिश संरेख होते हैं यदि वे एक ही रेखा के समांतर हों, चाहे उनका परिमाण कुछ भी हो।
- **समतलीय सदिश:** सदिश समतलीय कहलाते हैं यदि वे बिल्कुल एक ही तल के समांतर हों।

सदिशों का योग

- **सदिशों के योग का त्रिभुज नियम:** यदि दो सदिशों को क्रम में एक त्रिभुज की दो भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाता है, तो उनका योग (परिणामी) विपरीत क्रम में ली गई तीसरी भुजा द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **दो से अधिक सदिशों का योग:** हम कई सदिशों का परिणामी चरण दर चरण ज्ञात करने के लिए सदिश योग के बहुभुज नियम का उपयोग करते हैं।
- **सदिशों के योग का समांतर चतुर्भुज नियम:** यदि दो सदिशों को एक समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाता है, तो उनका परिणामी उभयनिष्ठ बिंदु से होकर गुजरने वाले विकर्ण द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **एक सदिश का ऋणात्मक:** किसी भी सदिश $\vec{a}$ के लिए, सदिश और उसके ऋणात्मक का योग शून्य सदिश होता है: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
- **दो दिए गए सदिशों का अंतर:** अंतर $\vec{a} - \vec{b}$ को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के ऋणात्मक के योग के रूप में परिभाषित किया गया है: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

एक बिंदु का स्थिति सदिश

- संदर्भ के मूल बिंदु O के संबंध में एक बिंदु P का स्थिति सदिश, सदिश $\overrightarrow{OP}$ होता है।
- किन्हीं दो बिंदुओं A और B के लिए, सदिश $\overrightarrow{AB}$ = (B का स्थिति सदिश) - (A का स्थिति सदिश) ।

एक अदिश द्वारा सदिश का गुणन

- एक सदिश $\vec{a}$ और एक अदिश x का गुणनफल एक सदिश होता है जिसका परिमाण $|x||\vec{a}|$ होता है।
- इसकी दिशा $\vec{a}$ के समान होती है यदि $x > 0$, और $\vec{a}$ के बिल्कुल विपरीत होती है यदि $x < 0$।
- **संरेखता की शर्त:** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख होते हैं यदि x और y ऐसे अदिश मौजूद हों कि $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ हो।

सदिशों की समतलीयता

- कोई भी सदिश $\vec{c}$, जो दो असंरेख सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के साथ समतलीय है, उसे $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के एक रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- **सूत्र:** $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$ (जहाँ l और m अदिश हैं)।

दो लंबवत अक्षों के अनुदिश एक सदिश का वियोजन

- एक 2D तल में, किसी भी सदिश $\vec{r}$ को x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश इसके घटकों के योग के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है।
- **सूत्र:** $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

तीन परस्पर लंबवत अक्षों के अनुदिश तीन आयामों में एक सदिश का वियोजन

- एक 3D अंतरिक्ष में, एक सदिश $\vec{r}$ को इकाई सदिशों $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ का उपयोग करके x, y, और z अक्षों के अनुदिश वियोजित किया जा सकता है।
- **सूत्र:** $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
- **परिमाण:** $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

विभाजन सूत्र

- मान लीजिए बिंदुओं A और B के स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं। मान लीजिए बिंदु P (स्थिति सदिश $\vec{r}$) AB को $m:n$ के अनुपात में विभाजित करता है।
- **आंतरिक विभाजन:** $\vec{r} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$
- **मध्य-बिंदु:** $\vec{r} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$
- **बाह्य विभाजन:** $\vec{r} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

एक सदिश की दिक्-कोज्याएं

- एक सदिश द्वारा x, y, और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ अंतरित कोणों α, β, γ की कोज्याओं को इसकी **दिक्-कोज्याएं** कहा जाता है।
- $l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$
- **संबंध:** $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

दो बिंदुओं को मिलाने वाले एक सदिश की दिक्-कोज्याएं:

बिंदुओं (x_1, y_1, z_1)और (x_2, y_2, z_2) के लिए दिक्-कोज्याएं $\frac{x_2-x_1}{r}, \frac{y_2-y_1}{r}, \frac{z_2-z_1}{r}$ हैं जहाँ r उनके बीच की दूरी है।

एक सदिश के दिक्-अनुपात:

कोई भी तीन वास्तविक संख्याएं जो एक सदिश की दिक्-कोज्याओं के समानुपाती होती हैं, उन्हें इसके **दिक्-अनुपात** कहा जाता है।

दो सदिशों का अदिश (या बिंदु) गुणनफल

- दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के अदिश गुणनफल को उनके परिमाणों और उनके बीच के कोण θ की कोज्या के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जाता है।
- यह हमेशा एक अदिश राशि (एक वास्तविक संख्या) देता है।
- **सूत्र:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

- **लंबवतता की शर्त:** दो शून्येतर सदिश लंबवत होते हैं यदि और केवल यदि उनका अदिश गुणनफल बिल्कुल शून्य हो ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$)।

- **गुण:** $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ और $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$

दो सदिशों का सदिश (या वज्र) गुणनफल

- दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का **सदिश गुणनफल** एक सदिश होता है जिसका परिमाण उनके द्वारा बनाए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल होता है, और इसकी दिशा दोनों सदिशों के लंबवत होती है।

- **सूत्र:** $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ sin\theta\ \hat{n}$ (जहाँ $\hat{n}$ दोनों के लंबवत एक इकाई सदिश है)।

- **समांतरता की शर्त:** दो शून्येतर सदिश समांतर या संरेख होते हैं यदि उनका सदिश गुणनफल शून्य सदिश हो ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$)।

- **गुण:** $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$ और $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k},\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath},\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}.$

सदिशों का अदिश त्रिक गुणनफल

- तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का अदिश त्रिक गुणनफल एक सदिश के साथ अन्य दो के सदिश गुणनफल का अदिश गुणनफल होता है।

- यह तीन सदिशों को इसके आसन्न किनारों के रूप में बनाकर बनाए गए समांतर षट्फलक के आयतन को दर्शाता है।

- **सूत्र:** $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

- **समतलीयता की शर्त:** तीन शून्येतर सदिश कड़ाई से समतलीय होते हैं यदि उनका अदिश त्रिक गुणनफल बिल्कुल शून्य हो ($[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$)।

TOP 5 QUESTIONS

Q1. सदिश $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

एक सदिश का परिमाण निम्न द्वारा दिया जाता है:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

घटकों को प्रतिस्थापित करने पर:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (6)^2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{49} = 7$$

अंतिम उत्तर: $|\vec{a}| = 7$ units

Q2. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}, \vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ का अदिश (बिंदु) गुणनफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

बिंदु गुणनफल है:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2)(1) + (3)(-2) + (-1)(3)$$
$$= 2 - 6 - 3$$
$$= -7$$

अंतिम उत्तर: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$

Q3. सदिशों $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

सबसे पहले, परिमाण:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

बिंदु गुणनफल:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(1) + (1)(1) + (1)(-1)$$
$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

अंतिम उत्तर: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53^\circ$

Q4. सदिश (वज्र) गुणनफल ज्ञात कीजिए यदि $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}, \vec{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ है।

उत्तर-

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

विस्तार करने पर:

$$= \hat{\imath}(1 \cdot 2 - (-1)(-1)) - \hat{\jmath}(2 \cdot 2 - (-1)(1)) + \hat{k}(2(-1) - 1 \cdot 1)$$
$$= \hat{\imath}(2 - 1) - \hat{\jmath}(4 - (-1)) + \hat{k}(-2 - 1)$$
$$= \hat{\imath}(1) - \hat{\jmath}(5) + \hat{k}(-3)$$
$$= \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

अंतिम उत्तर: $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

Q5. जाँच कीजिए कि क्या सदिश $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \vec{b} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}, \vec{c} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ समतलीय हैं।

उत्तर-

सदिश समतलीय होते हैं यदि उनका अदिश त्रिक गुणनफल शून्य हो:

$$[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

विस्तार करने पर:

$$\begin{aligned}
&= 1(3 \cdot 5 - (-4)(-3)) - (-2)((-2 \cdot 5) - (-4 \cdot 1)) + 3((-2 \cdot -3) - (3 \cdot 1)) \\
&= 1(15 - 12) - (-2)(-10 - (-4)) + 3(6 - 3) \\
&= 1(3) - (-2)(-6) + 3(3) \\
&= 3 - 12 + 9 = 0
\end{aligned}$$

अंतिम उत्तर: $[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}] = 0 \Rightarrow$ सदिश समतलीय हैं।

10

समतल

परिचय

समतल एक द्वि-आयामी चपटी सतह है जो त्रि-आयामी अंतरिक्ष में अनंत तक फैली हुई है। इस अध्याय में, हम सीखेंगे कि विभिन्न परिस्थितियों में समतल के बीजगणितीय और सदिश समीकरण कैसे प्राप्त किए जाएं, जैसे कि विशिष्ट बिंदुओं से होकर गुजरना, विशिष्ट अंतःखंड बनाना, या उनके बीच की दूरियों और कोणों को ज्ञात करना।

अभिलंब रूप में समतल का समीकरण

- एक **समतल** विशिष्ट रूप से निर्धारित होता है यदि मूल बिंदु से लंबवत दूरी और अभिलंब की दिशा ज्ञात हो।
- **सदिश रूप:** मूल बिंदु से d दूरी पर इकाई अभिलंब सदिश $\hat{n}$ वाले समतल का समीकरण।

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = d$$

- **कार्तीय रूप:** यदि l, m, n अभिलंब की दिक्-कोज्याएं हैं, तो समीकरण है:

$$lx + my + nz = d$$

एक दिए गए बिंदु से होकर गुजरने वाले और एक दिए गए सदिश के लंबवत समतल का समीकरण

- एक समतल पूरी तरह से निर्धारित होता है यदि यह एक ज्ञात बिंदु से होकर गुजरता है और एक ज्ञात अभिलंब सदिश के लंबवत होता है।
- **सदिश रूप:** जहाँ $\vec{a}$ बिंदु का स्थिति सदिश है और $\vec{n}$ अभिलंब सदिश है।

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

- **कार्तीय रूप:** जहाँ (x_1, y_1, z_1)दिया गया बिंदु है और A, B, C अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं।

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

तीन असंरेख बिंदुओं से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण

- एक अद्वितीय समतल हमेशा तीन दिए गए असंरेख बिंदुओं से होकर गुजरता है।
- **सदिश रूप:** जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन बिंदुओं के स्थिति सदिश हैं।

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

- **कार्तीय रूप:**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

अंतःखंड रूप में समतल का समीकरण

- अंतःखंड रूप क्रमशः x, y, और z निर्देशांक अक्षों पर विशिष्ट **अंतःखंड** बनाने वाले समतल के समीकरण को दर्शाता है।
- **सूत्र:** जहाँ a, b, c क्रमशः x, y, और z अंतःखंड हैं।

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

दो दिए गए समतलों के प्रतिच्छेदन से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण

- दो दिए गए समतलों की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर गुजरने वाले समतलों का अनंत परिवार।
- **सदिश रूप:**

$$(\vec{r} \cdot \vec{n_1} - d_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n_2} - d_2) = 0$$

- **कार्तीय रूप:**

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

दो समतलों के बीच का कोण

- **दो समतलों के बीच का कोण** ठीक उनके संबंधित अभिलंबों के बीच के कोण के रूप में परिभाषित किया जाता है।

- **सदिश रूप:**

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}\right|$$

- **कार्तीय रूप:**

$$\cos\theta = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|$$

- **लंबवतता की शर्त:** $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$
- **समांतरता की शर्त:** $\vec{n_1}\times\vec{n_2} = \vec{0}$

एक समतल से एक बिंदु की दूरी

- एक दिए गए समतल से एक विशिष्ट बिंदु की लंबवत दूरी।
- **सदिश रूप:** स्थिति सदिश $\vec{a}$ वाले एक बिंदु से समतल $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ की दूरी।

$$\text{दूरी} = |\vec{a}\cdot\hat{n} - d|$$

- **कार्तीय रूप:** (x_1, y_1, z_1) से Ax + By + Cz + D = 0 की दूरी।

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से 7 इकाइयों की दूरी पर है और सदिश $\vec{n} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ के अभिलंबवत है।

उत्तर-

सबसे पहले, अभिलंब सदिश का परिमाण ज्ञात करें:

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}$$

इकाई अभिलंब सदिश:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}$$

समतल के अभिलंब रूप का उपयोग करते हुए:

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = d$$
$$\vec{r} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{70}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{70}}\hat{\jmath} - \frac{6}{\sqrt{70}}\hat{k}\right) = 7$$

सरल करने के लिए दोनों पक्षों को $\sqrt{70}$ से गुणा करने पर:

$$\vec{r} \cdot (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 6\hat{k}) = 7\sqrt{70}$$

अंतिम उत्तर: $\vec{r} \cdot (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 6\hat{k}) = 7\sqrt{70}$

Q2. बिंदु $(1, 2, -4)$ से होकर गुजरने वाले और दिक्-अनुपातों $2, 3, -1$ के लंबवत समतल का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

अभिलंब सदिश है:

$$\vec{n} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

समतल के समीकरण का उपयोग करते हुए:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

मान प्रतिस्थापित करने पर:

$$2(x - 1) + 3(y - 2) - 1(z - (-4)) = 0$$
$$2x - 2 + 3y - 6 - z - 4 = 0$$
$$2x + 3y - z - 12 = 0$$

अंतिम उत्तर: $2x + 3y - z - 12 = 0$

Q3. समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा काटे गए अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

समीकरण को 5 से विभाजित करने पर:

$$\frac{2x}{5} + \frac{y}{5} - \frac{z}{5} = 1$$

अंतःखंड रूप में बदलने पर:

$$\frac{x}{5/2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$$

अतः अंतःखंड हैं:

$$x = \frac{5}{2}, y = 5, z = -5$$

अंतिम उत्तर: x-intercept $= \frac{5}{2}$, y-intercept $= 5$, z-intercept $= -5$.

Q4. समतलों $2x + y - 2z = 5$ और $3x - 6y - 2z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

अभिलंब सदिश:

$$\vec{n}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \vec{n}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

बिंदु गुणनफल:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2)(3) + (1)(-6) + (-2)(-2) = 6 - 6 + 4 = 4$$

परिमाण:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3, |\vec{n}_2| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$$

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

$$\theta \approx 79.0^\circ$$

अंतिम उत्तर: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) \approx 79.0^\circ$

Q5. समतल $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})=4$ से बिंदु $(2,5,-3)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

कार्तीय रूप में बदलने पर:

$$6x-3y+2z-4=0$$

दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|6(2)-3(5)+2(-3)-4|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}$$

$$=\frac{|12-15-6-4|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{|-13|}{\sqrt{49}}$$

$$d=\frac{13}{7}$$

अंतिम उत्तर: $d=\frac{13}{7}$ units

11

सीधी रेखा

परिचय

त्रि-आयामी अंतरिक्ष में एक सीधी रेखा विशिष्ट रूप से निर्धारित होती है यदि यह एक निर्दिष्ट दिशा में एक ज्ञात बिंदु से होकर गुजरती है, या यदि यह दो अलग-अलग बिंदुओं से होकर गुजरती है। यह अध्याय रेखाओं के सदिश और कार्तीय समीकरणों, उनके बीच के कोण, और विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी की व्याख्या करता है।

एक रेखा का सदिश समीकरण

1. एक दिए गए बिंदु से होकर गुजरने वाली और एक दिए गए सदिश के समांतर रेखा का सदिश समीकरण

- मान लीजिए एक रेखा एक दिए गए बिंदु A से होकर गुजरती है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है और यह एक विशिष्ट दिए गए सदिश $\vec{m}$ के समांतर है।
- मान लीजिए $\vec{r}$ इस सीधी रेखा पर किसी भी यादृच्छिक बिंदु P का स्थिति सदिश है।
- **सूत्र:**

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$$

(जहाँ λ एक अदिश पैरामीटर है)

2. एक दिए गए बिंदु से होकर गुजरने वाली और दी गई दिक्-कोज्याओं वाली रेखा का कार्तीय समीकरण

- मान लीजिए एक रेखा एक निश्चित बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर गुजरती है और इसकी **दिक्-कोज्याएं** l, m, n दी गई हैं।
- रेखा पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक (x, y, z) दिक्-कोज्याओं के साथ एक समानुपाती संबंध को संतुष्ट करते हैं।
- **सूत्र:**

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

- यदि दिक्-कोज्याओं के बजाय **दिक्-अनुपात** a, b, c दिए गए हैं, तो सूत्र समान रहता है।

- **दिक्-अनुपातों के साथ सूत्र:**

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

3. दो दिए गए बिंदुओं से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण

- एक अद्वितीय सीधी रेखा हमेशा ठीक दो दिए गए अलग-अलग बिंदुओं A और B से होकर गुजरती है।
- **सदिश रूप:** मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो बिंदुओं A और B के स्थिति सदिश हैं। दिशा सदिश $(\vec{b} - \vec{a})$ बन जाता है।

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

- **कार्तीय रूप:** मान लीजिए दो बिंदु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं। दिक्-अनुपात उनके निर्देशांकों के अंतर होते हैं।

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

दो रेखाओं के बीच का कोण

- दो सीधी रेखाओं के बीच का **कोण** θ ठीक उनके संबंधित दिशा सदिशों $\vec{m_1}$ और $\vec{m_2}$ के बीच के कोण के रूप में परिभाषित किया जाता है।
- **सदिश रूप:**

$$\cos\theta = \frac{m_1 \cdot m_2}{|m_1||m_2|}$$

- **कार्तीय रूप:** यदि रेखाओं के दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं।

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- **लंबवतता की शर्त:** दो रेखाएं बिल्कुल लंबवत होती हैं यदि उनके दिशा सदिशों का बिंदु गुणनफल शून्य हो।

$$m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \text{or} \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

- **समांतरता की शर्त:** दो रेखाएं समांतर होती हैं यदि उनके दिक्-अनुपात कड़ाई से समानुपाती हों।

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

- **विषमतलीय रेखाएं:** अंतरिक्ष में सीधी रेखाएं जो न तो समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी हैं, विषमतलीय रेखाएं कहलाती हैं। वे पूरी तरह से अलग-अलग तलों में स्थित होती हैं।
- **न्यूनतम दूरी (विषमतलीय रेखाएं):** न्यूनतम दूरी d दो विषमतलीय रेखाओं $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{m_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{m_2}$ के बीच की लंबवत दूरी है।
- **विषमतलीय रेखाओं के लिए सूत्र:**

$$d = \left| \frac{(a_2 - a_1) \cdot (m_1 \times m_2)}{|m_1 \times m_2|} \right|$$

- **प्रतिच्छेदी रेखाओं के लिए शर्त:** दो रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं यदि और केवल यदि उनके बीच की न्यूनतम दूरी बिल्कुल शून्य हो।

$$(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{m_1} \times \vec{m_2}) = 0$$

- **न्यूनतम दूरी (समांतर रेखाएं):** दो समांतर रेखाओं $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{m}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{m}$ के बीच की लंबवत दूरी d।
- **समांतर रेखाओं के लिए सूत्र:**

$$d = \frac{|(a_2 - a_1) \times m|}{|m|}$$

TOP 5 QUESTIONS

Q1. बिंदु $(5, 2, -4)$ से होकर गुजरने वाली और सदिश $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिए गए बिंदु का स्थिति सदिश:

$$\vec{a} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

दिशा सदिश:

$$\vec{m} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 8\hat{k}$$

एक रेखा के सदिश समीकरण का उपयोग करते हुए:

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{m}$$
$$\vec{r} = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}) + \lambda(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 8\hat{k})$$

अंतिम उत्तर: $\vec{r} = (5 + 3\lambda)\hat{\imath} + (2 + 2\lambda)\hat{\jmath} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$

Q2. बिंदुओं $(-1, 0, 2)$ और $(3, 4, 6)$ से होकर गुजरने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिक्-अनुपात:

$$(3 - (-1), 4 - 0, 6 - 2) = (4,4,4)$$

दो-बिंदु रूप का उपयोग करते हुए:

$$\frac{x - (-1)}{4} = \frac{y - 0}{4} = \frac{z - 2}{4}$$
$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z - 2}{4}$$

पूरे समीकरण को 4 से विभाजित करने पर:

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{1}$$

अंतिम उत्तर: $x + 1 = y = z - 2$

Q3. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनके दिक्-अनुपात $(1, 1, 2)$ और $(\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$ के समानुपाती हैं।

उत्तर-

मान लीजिए:

$$\vec{m}_1 = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$\vec{m}_2 = (\sqrt{3} - 1)\hat{i} + (-\sqrt{3} - 1)\hat{j} + 4\hat{k}$$

बिंदु गुणनफल:

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = (1)(\sqrt{3} - 1) + (1)(-\sqrt{3} - 1) + (2)(4)$$
$$= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 + 8 = 6$$

परिमाण:

$$|\vec{m}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$
$$|\vec{m}_2| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{(4 - 2\sqrt{3}) + (4 + 2\sqrt{3}) + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

अंतिम उत्तर: $\theta = 60^\circ$ या $\frac{\pi}{3}$

Q4. निर्धारित कीजिए कि क्या रेखाएं $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(2\hat{i} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j}) + \mu(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ लंबवत हैं।

उत्तर-

दिशा सदिश:

$$\vec{m}_1 = 2\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{m}_2 = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

बिंदु गुणनफल:

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = (2)(1) + (0)(1) + (1)(-1)$$
$$= 2 + 0 - 1 = 1$$

चूँकि:

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 \neq 0$$

अंतिम उत्तर: रेखाएं लंबवत नहीं हैं।

Q5. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\vec{m}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{m}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

अंतर:

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

वज्र गुणनफल:

$$\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

परिमाण:

$$|\vec{m}_1 \times \vec{m}_2| = \sqrt{9 + 0 + 9} = 3\sqrt{2}$$

बिंदु गुणनफल:

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{m}_1 \times \vec{m}_2) = (-3) + 0 + (-6) = -9$$

दूरी:

$$d = \left|\frac{-9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

परिमेयकरण करने पर:

$$d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

अंतिम उत्तर: $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ units

12

रैखिक प्रोग्रामन

परिचय

रैखिक प्रोग्रामन एक गणितीय तकनीक है जिसका उपयोग सीमित संसाधनों को इष्टतम रूप से आवंटित करने के लिए किया जाता है ताकि एक विशिष्ट लक्ष्य प्राप्त किया जा सके, जैसे लाभ को अधिकतम करना या लागत को कम करना। इसमें वास्तविक दुनिया की निर्णय लेने की समस्याओं को रैखिक असमिकाओं में बदलना और सबसे कुशल परिणाम खोजने के लिए उन्हें आलेखीय रूप से हल करना शामिल है।

रैखिक प्रोग्रामन में शामिल विभिन्न शब्दों की परिभाषाएं

- **उद्देश्य फलन:** दो या अधिक चरों का एक रैखिक फलन जिसे अधिकतम या न्यूनतम किया जाना है।

  सूत्र: $Z = ax + by$

- **व्यवरोध:** रैखिक असमिकाएं या समीकरण जो संसाधनों की सीमित उपलब्धता को दर्शाने वाले चरों को प्रतिबंधित करते हैं।

- **ऋणेतर प्रतिबंध:** वे शर्तें जो दर्शाती हैं कि निर्णय चर किसी भी परिस्थिति में ऋणात्मक नहीं हो सकते हैं।

  सूत्र: $x \geq 0, \ y \geq 0$

- **इष्टतमीकरण समस्या:** एक समस्या जो कुछ व्यवरोधों के अधीन एक विशिष्ट रैखिक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करना चाहती है।

- **सुसंगत क्षेत्र:** रैखिक प्रोग्रामन समस्या के ऋणेतर व्यवरोधों सहित सभी व्यवरोधों द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र।

- **सुसंगत हल:** सुसंगत क्षेत्र के भीतर या ठीक उसकी सीमा पर स्थित कोई भी बिंदु जो एक साथ सभी व्यवरोधों को संतुष्ट करता है।

- **इष्टतम हल:** कोई भी वैध सुसंगत हल जो उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान प्रदान करता है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सूत्रीकरण

सूत्रीकरण एक वास्तविक दुनिया की शब्द समस्या को बीजगणितीय समीकरणों और असमिकाओं में बदलने की गणितीय प्रक्रिया है।

- **चरण 1:** निर्धारित किए जाने वाले अज्ञात निर्णय चरों को पहचानें और उन्हें x और y द्वारा सटीक रूप से निरूपित करें।
- **चरण 2: उद्देश्य फलन** को पहचानें और इसे x और y के एक रैखिक संयोजन के रूप में बीजगणितीय रूप से व्यक्त करें।
- **चरण 3:** दी गई शर्तों के आधार पर सभी **व्यवरोधों** को पहचानें और उन्हें x और y के पदों में रैखिक असमिकाओं के रूप में व्यक्त करें।
- **चरण 4:** स्पष्ट रूप से **ऋणेतर प्रतिबंधों** का उल्लेख करें क्योंकि भौतिक राशियाँ ऋणात्मक नहीं हो सकती हैं $(x \geq 0, y \geq 0)$।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेखीय हल

कोणीय बिंदु विधि: केवल सुसंगत क्षेत्र के शीर्षों पर उद्देश्य फलन का मूल्यांकन करके LPP को हल करने के लिए एक विश्वसनीय आलेखीय विधि।

- **चरण 1:** उभयनिष्ठ परिबद्ध **सुसंगत क्षेत्र** ज्ञात करने के लिए XY-निर्देशांक तल पर सभी दी गई रैखिक असमिकाओं का आलेख बनाएं।
- **चरण 2:** इस परिबद्ध सुसंगत क्षेत्र के सभी **कोणीय बिंदुओं** (शीर्षों) के सटीक निर्देशांक निर्धारित करें।
- **चरण 3:** प्रत्येक परिकलित कोणीय बिंदु पर उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मूल्यांकन करें।
- **चरण 4:** Z का अधिकतम या न्यूनतम मान ठीक इनमें से एक या अधिक कोणीय बिंदुओं पर होता है। इष्टतमीकरण लक्ष्य के आधार पर मान चुनें।

TOP 5 QUESTIONS

Q1. $Z = 3x + 4y$ **को अधिकतम कीजिए, व्यवरोध** $x + y \leq 4, x \geq 0,$ **और** $y \geq 0$ **के अधीन।**

उत्तर-

अधिकतम कीजिए

$$Z = 3x + 4y$$

व्यवरोधों के अधीन

$$x + y \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

चरण 1: सीमा रेखा

$$x + y = 4$$

अंतःखंड:

$$(4, 0), \quad (0, 4)$$

इन दो बिंदुओं को मिलाकर रेखा खींची जाती है।

चरण 2: सुसंगत क्षेत्र

चूँकि

$$x + y \leq 4$$

और $x, y \geq 0$, सुसंगत क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में रेखा के नीचे स्थित है।

कोणीय बिंदु हैं:

$$(0, 0), \quad (4, 0), \quad (0, 4)$$

चरण 3: उद्देश्य फलन का मूल्यांकन करें

$$Z = 3x + 4y$$

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(4,0) = 12$$

$$Z(0,4) = 16$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{Z_{max} = 16 \text{ (0,4) पर}}$$

Q2. आलेखीय रूप से $Z = -3x + 4y$ को न्यूनतम कीजिए, व्यवरोध $x + 2y \le 8$, $3x + 2y \le 12$, $x \ge 0, y \ge 0$ के अधीन।

उत्तर-

न्यूनतम कीजिए

$$Z = -3x + 4y$$

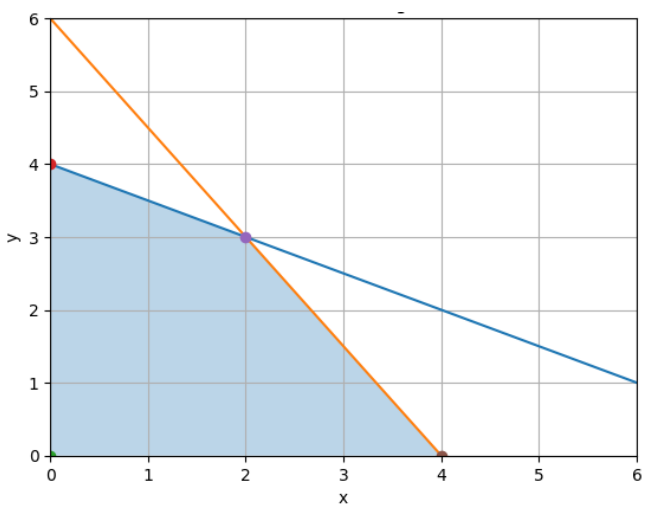
व्यवरोधों के अधीन

$$x + 2y \le 8, \quad 3x + 2y \le 12, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$$

चरण 1: सीमा रेखाएं

$$x + 2y = 8 \Rightarrow (0,4), \quad (8,0)$$

$$3x + 2y = 12 \Rightarrow (0,6), \quad (4,0)$$



चरण 2: सुसंगत क्षेत्र

क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है जो दोनों असमिकाओं को संतुष्ट करता है।

रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु:

घटाने पर:

$$x + 2y = 8$$

$$3x + 2y = 12$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 3$$

कोणीय बिंदु:

$$(0,0), \quad (0,4), \quad (2,3), \quad (4,0)$$

चरण 3: उद्देश्य फलन का मूल्यांकन करें

$$Z = -3x + 4y$$

$$Z(0,0) = 0$$

$$Z(0,4) = 16$$

$$Z(2,3) = -6 + 12 = 6$$

$$Z(4,0) = -12$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{Z_{min} = -12 \text{ (4,0) पर}}$$

Q3. $Z = 5x + 3y$ **को अधिकतम कीजिए, व्यवरोध** $3x + 5y \leq 15$, $5x + 2y \leq 10$, $x \geq 0, y \geq 0$ **के अधीन।**

उत्तर-

अधिकतम कीजिए

$$Z = 5x + 3y$$

व्यवरोधों के अधीन

$$3x + 5y \leq 15, \quad 5x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

चरण 1: सीमा रेखाएं

$$3x + 5y = 15 \Rightarrow (0, 3), \quad (5, 0)$$

$$5x + 2y = 10 \Rightarrow (0, 5), \quad (2, 0)$$

चरण 2: प्रतिच्छेदन बिंदु

गुणा करने पर:

$$6x + 10y = 30$$

$$25x + 10y = 50$$

घटाने पर:

$$19x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{19}$$

प्रतिस्थापित करने पर:

$$5\left(\frac{20}{19}\right) + 2y = 10$$

$$\frac{100}{19} + 2y = 10$$

$$2y = \frac{90}{19} \Rightarrow y = \frac{45}{19}$$

प्रतिच्छेदन बिंदु:

$$\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$$

चरण 3: कोणीय बिंदु

$$(0,0), \quad (0,3), \quad (2,0), \quad \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$$

चरण 4: उद्देश्य फलन का मूल्यांकन करें

$$Z(0,0) = 0$$

$$Z(0,3) = 9$$

$$Z(2,0) = 10$$

$$Z\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) = \frac{100+135}{19} = \frac{235}{19} \approx 12.37$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{Z_{max} = \frac{235}{19} \quad \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) \text{ पर}}$$

Q4. निम्नलिखित के लिए गणितीय व्यवरोध तैयार कीजिए: एक मशीन उत्पाद A बनाने में 2 घंटे और उत्पाद B बनाने में 3 घंटे का समय लेती है। मशीन अधिकतम 12 घंटे तक काम कर सकती है।

उत्तर-

एक मशीन उत्पाद A बनाने में 2 घंटे और उत्पाद B बनाने में 3 घंटे का समय लेती है। कुल उपलब्ध समय = 12 घंटे।

माना

$$x = \text{उत्पाद A की इकाइयाँ}, \quad y = \text{उत्पाद B की इकाइयाँ}$$

समय का व्यवरोध:

$$2x + 3y \leq 12$$

ऋणेतर:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

अंतिम उत्तर:

$$\boxed{2x + 3y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0}$$

Q5. उद्देश्य फलन $Z = 2x + 5y$ का कोणीय बिंदुओं $(0,5), (4,3),$ और $(0,0)$ पर मूल्यांकन करके इसका अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिए गए कोणीय बिंदुओं पर $Z = 2x + 5y$ का मूल्यांकन करें।

दिए गए बिंदु:

$$(0,5), \quad (4,3), \quad (0,0)$$

मानों की गणना करें:

$$Z(0,5) = 2(0) + 5(5) = 25$$

$$Z(4,3) = 2(4) + 5(3) = 8 + 15 = 23$$

$$Z(0,0) = 0$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{Z_{max} = 25 \ (0,5) \text{ पर}}$$

13
गणितीय विवेचन

परिचय

गणितीय विवेचन में तार्किक निगमन की प्रक्रिया को औपचारिक रूप देना शामिल है। इस अध्याय में, हम गणितीय रूप से स्वीकार्य कथनों, उनके निषेधों, "और" तथा "या" जैसे तार्किक संयोजकों, परिमाणकों, और गणितीय कथनों को कठोरता से मान्य करने या औपचारिक रूप से सिद्ध करने की विभिन्न विधियों के बारे में जानेंगे।

गणितीय कथन

- एक **कथन** (या साध्य) एक ऐसा निश्चयात्मक घोषणात्मक वाक्य है जो निश्चित रूप से या तो सत्य होता है या असत्य, लेकिन कभी भी एक साथ दोनों नहीं होता है।
- आदेशात्मक (आदेश), प्रश्नवाचक (प्रश्न), या विस्मयादिबोधक वाक्यों को गणितीय कथन नहीं माना जाता है।
- परिवर्तनीय समय (जैसे "आज", "कल") या परिवर्तनीय स्थानों वाले वाक्य भी तब तक कथन नहीं होते जब तक कि उनका सटीक संदर्भ निर्दिष्ट न हो।

एक कथन का निषेध

- किसी कथन का **निषेध** मूल कथन का पूर्ण खंडन होता है।
- यदि किसी कथन को p द्वारा निरूपित किया जाता है, तो इसके निषेध को ~ p (जिसे 'p नहीं' पढ़ा जाता है) द्वारा निरूपित किया जाता है।
- यदि p पूर्णतः सत्य है, तो ~ p पूर्णतः असत्य होता है, और इसके विपरीत भी।

मिश्र कथन

- एक **मिश्र कथन** विशिष्ट तार्किक शब्दों या वाक्यांशों का उपयोग करके दो या दो से अधिक सरल कथनों को मिलाकर बनाया जाता है।
- प्रत्येक व्यक्तिगत सरल कथन जो एक मिश्र कथन बनाता है, उसे **घटक कथन** कहा जाता है।

मूल तार्किक संयोजक

- **संयोजन ("और"):** "और" के साथ दो सरल कथनों को जोड़कर बनाया गया एक मिश्र कथन। यह केवल तभी सत्य होता है जब दोनों घटक कथन बिल्कुल सत्य हों।
- **वियोजन ("या"):** "या" के साथ दो सरल कथनों को जोड़कर बनाया गया एक मिश्र कथन। यह केवल तभी असत्य होता है जब दोनों घटक कथन बिल्कुल असत्य हों।
- **अपवर्जित "या":** एक ऐसी स्थिति जहाँ दो कथनों में से केवल एक ही सत्य हो सकता है, लेकिन पूर्णतः दोनों नहीं।
- **अंतर्विष्ट "या":** एक ऐसी स्थिति जहाँ कम से कम एक कथन सत्य होता है, और संभवतः दोनों सत्य होते हैं।

परिमाणक

- **परिमाणक** ऐसे विशिष्ट वाक्यांश हैं जैसे "एक ऐसा अस्तित्व है" और "प्रत्येक के लिए" जो एक गणितीय कथन में मौजूद चरों को परिमाणित करते हैं।
- **अस्तित्ववाचक परिमाणक:** वाक्यांश "एक ऐसा अस्तित्व है" (जिसे $\exists$ द्वारा निरूपित किया जाता है) का अर्थ है कि कम से कम एक अवयव ऐसा है जिसके लिए दी गई शर्त सत्य है।
- **सार्वत्रिक परिमाणक:** वाक्यांश "सभी के लिए" या "प्रत्येक के लिए" (जिसे $\forall$ द्वारा निरूपित किया जाता है) का अर्थ है कि दी गई शर्त परिभाषित समुच्चय के प्रत्येक अवयव के लिए सत्य है।

निहितार्थ

- **सप्रतिबंध ("यदि-तो"):** कथन "यदि p, तो q" को $p \Rightarrow q$ द्वारा निरूपित किया जाता है। यहाँ, p, q के लिए पर्याप्त शर्त है।
- **प्रतिधनात्मक:** "यदि p, तो q" का प्रतिधनात्मक पूरी तरह से "यदि ~q, तो ~p" के रूप में परिभाषित किया गया है। दोनों कथनों का सत्य मान बिल्कुल समान होता है।
- **विलोम:** "यदि p, तो q" का विलोम क्रम को उलट कर बनाया जाता है: "यदि q, तो p"।
- **द्वि-प्रतिबंधी ("यदि और केवल यदि"):** इसे $p \Leftrightarrow q$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इसका अर्थ है कि $p \Rightarrow q$ और $q \Rightarrow p$ दोनों एक साथ सत्य हैं।

कथनों का प्रमाणीकरण

- **प्रत्यक्ष विधि:** "यदि p, तो q" को विश्लेषणात्मक रूप से सिद्ध करने के लिए, मान लें कि p पूर्णतः सत्य है और तार्किक रूप से निष्कर्ष निकालें कि q भी सत्य होना चाहिए।
- **प्रतिधनात्मक विधि:** मान लें कि q पूर्णतः असत्य है (~q) और तार्किक रूप से निष्कर्ष निकालें कि इसलिए p भी असत्य होना चाहिए (~p)।
- **विरोधोक्ति विधि:** मान लें कि दिया गया कथन p पूर्णतः असत्य है, और गणितीय रूप से एक विरोधाभास का निष्कर्ष निकालें, यह सिद्ध करते हुए कि p अनिवार्य रूप से सत्य होना चाहिए।
- **प्रत्युदाहरण द्वारा:** किसी सामान्य कथन को निश्चित रूप से असत्य सिद्ध करने के लिए, केवल एक विशिष्ट उदाहरण खोजना जहाँ गणितीय शर्त विफल हो जाती है, पूर्णतः पर्याप्त है।

TOP 5 QUESTIONS

Q1. जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित वाक्य एक कथन है: "एक वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा धनात्मक होता है।"

उत्तर- यह एक घोषणात्मक वाक्य है जो पूर्णतः असत्य है (चूँकि $0^2 = 0$ है, जो पूर्णतः धनात्मक नहीं है)।

चूँकि इसका एक निश्चित सत्य मान (असत्य) है, इसलिए यह एक वैध गणितीय कथन है।

Q2. कथन का निषेध लिखिए: "सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।"

उत्तर- एक सार्वत्रिक परिमाणक ("सभी") का निषेध करने के लिए, हम एक अस्तित्ववाचक परिमाणक ("एक ऐसा अस्तित्व है") का उपयोग करते हैं।

निषेध है: "कम से कम एक अभाज्य संख्या का अस्तित्व है जो विषम नहीं है।"

Q3. सप्रतिबंध कथन का प्रतिधनात्मक लिखिए: "यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है, तो यह 3 से विभाज्य है।"

उत्तर- प्रतिधनात्मक घटक कथनों के क्रम को उलट देता है और दोनों का पूर्णतः निषेध करता है।

प्रतिधनात्मक है: "यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य नहीं है, तो यह 9 से विभाज्य नहीं है।"

Q4. मिश्र कथन में घटक कथनों और संयोजक की पहचान कीजिए: "$\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है या एक अपरिमेय संख्या है।"

उत्तर- घटक 1 (p): $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

घटक 2 (q): $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इन घटकों को जोड़ने वाला तार्किक संयोजक "या" है।

Q5. प्रत्युदाहरण विधि का उपयोग करके कथन को असत्य सिद्ध कीजिए: "प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, $x^2 > x$।"

उत्तर- मान लीजिए $x = 0.5$ है।

x^2 की गणना करें।

$$(0.5)^2 = 0.25.$$

चूँकि 0.25 पूर्णतः 0.5 से कम है, इसलिए शर्त $x^2 > x$ विफल हो जाती है।

यह एकल प्रत्युदाहरण निश्चित रूप से सिद्ध करता है कि मूल कथन असत्य है।