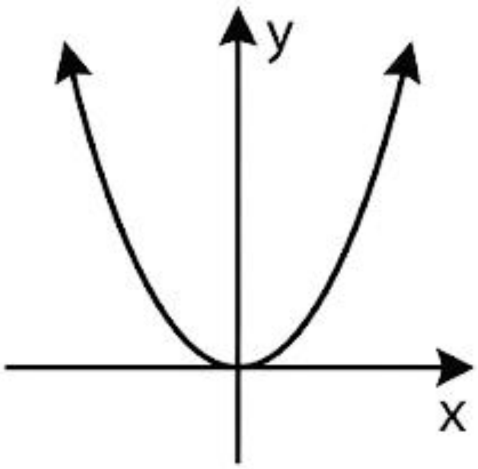
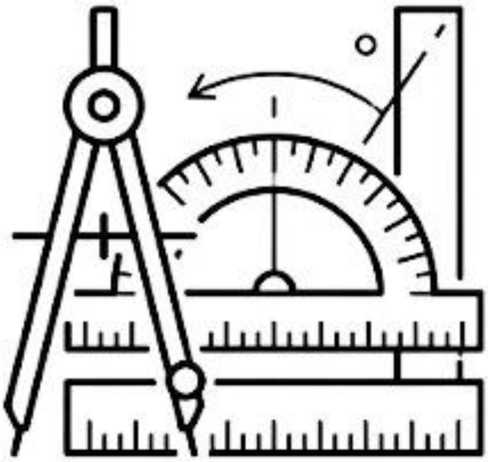
MVS FOUNDATION

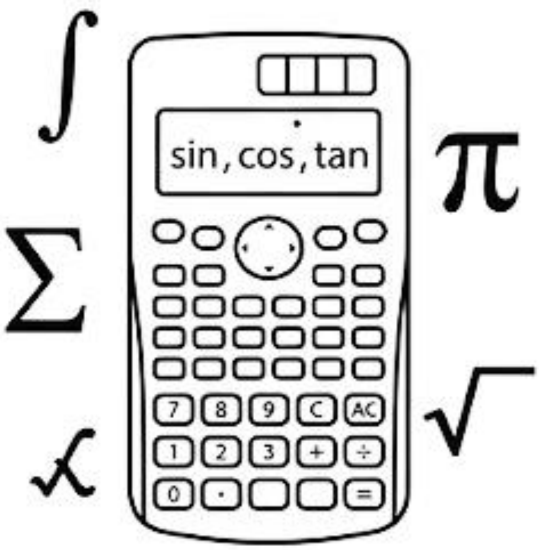
FREE NOTES

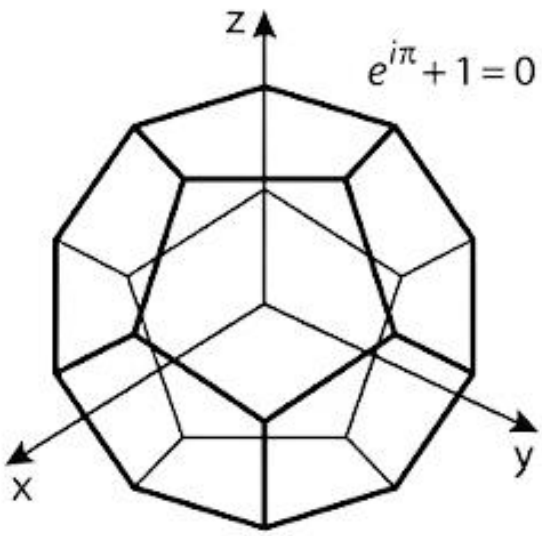
MATHEMATICS (211)

CHAPTERWISE NOTES









MATHEMATICS

Sl. No.	Module	Chapters (Public Examination)	Marks
1	Module 1: Algebra	**L-4: Special Product and Factorisation** **L-5: Linear Equation** **L-6: Quadratic Equation** **L-7: Arithmetic Progression**	20
2	Module 2: Commercial Mathematics	**L-8: Percentage and its Applications** **L-9: Installment Buying**	8
3	Module 6: Statistics	**L-25: Measure of Central Tendency L-26: Introduction to Probability**	12

Component	Details	Marks
Public Exam (Selected Modules 1,2,6)	Total Chapters: 8	40
Practical Exam	Practical	15
TMA	Tutor Marked Assignment	17
Final Possible Marks		**72 Marks**

विषय- सूची

1

विशेष गुणनफल तथा गुणनखण्डन

परिचय

इस अध्याय में हम बहुपदों के **विशेष गुणनफलों** और उनके **गुणनखण्डन** का अध्ययन करेंगे। विशेष गुणनफलों की मदद से गुणा के सभी पदों को लिखे बिना ही सीधा गुणनफल ज्ञात किया जा सकता है, जिससे समय और मेहनत की बचत होती है। हम बहुपदों के म.स., ल.स. और परिमेय व्यंजकों के बारे में भी जानेंगे।

विशेष गुणनफल

बीजगणित में बार-बार प्रयोग होने वाले ऐसे गुणनफल जो गणना को छोटा और आसान बनाते हैं, **विशेष गुणनफल** कहलाते हैं। महत्वपूर्ण बीजीय सूत्र (विशेष गुणनफल):

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

कुछ अन्य विशेष गुणनफल

इस भाग में द्विपदों के घनों (cubes) से संबंधित **विशेष गुणनफलों** का प्रयोग किया जाता है।

महत्वपूर्ण सूत्र:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$
- $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

बहुपदों के गुणनखण्डन

एक बहुपद को दो या अधिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया **गुणनखण्डन** कहलाती है।

(1) वितरण गुण द्वारा गुणनखण्ड: सभी पदों में मौजूद एक उभयनिष्ठ (common) पद या चर को बाहर निकालकर गुणनखण्ड किया जाता है।

(2) दो वर्गों के अन्तर वाले बहुपदों का गुणनखण्ड: इसमें सूत्र $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$का प्रयोग किया जाता है।

(3) पूर्ण वर्ग त्रिपदी का गुणनखण्डन: इसमें सूत्र $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ या $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ का प्रयोग होता है।

(4) उस बहुपद, जिसे दो वर्गों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सके, का गुणनखंडन: उपयुक्त पद को जोड़कर और घटाकर पहले पूर्ण वर्ग बनाया जाता है, फिर वर्गों के अन्तर का सूत्र लगाते हैं।

(5) पूर्ण घन बहुपदों का गुणनखण्डन: इसमें पूर्ण घन के सूत्र $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$ का उपयोग होता है।

(6) ऐसे बहुपदों, जिनमें दो घनों का योग अथवा अन्तर सम्मिलित हो, का गुणनखंडन: इसमें $x^3 + y^3$ या $x^3 - y^3$ के गुणनखण्ड सूत्रों का प्रयोग होता है।

(7) मध्य पद को विभक्त करके त्रिपदों के गुणनखंड करना: $Ax^2 + Bx + C$ प्रकार के बहुपद में, मध्य पद B को ऐसे दो भागों में बांटते हैं जिनका योग B और गुणनफल AC के बराबर हो।

बहुपदों के म.स. तथा ल.स.

(1) बहुपदों का म.स. (HCF): यह वह बड़े से बड़ा व्यंजक है जो दिए गए सभी बहुपदों का एक उभयनिष्ठ (common) गुणनखण्ड होता है। इसे न्यूनतम घात वाले उभयनिष्ठ चरों और गुणांकों के म.स. से निकाला जाता है।

(2) बहुपदों का ल.स. (LCM): यह वह छोटे से छोटा व्यंजक है जो दिए गए प्रत्येक बहुपद का गुणज (multiple) होता है। इसे अधिकतम घात वाले सभी चरों और गुणांकों के ल.स. से निकाला जाता है।

परिमेय व्यंजक

- वह बीजीय व्यंजक जिसे $\frac{P}{Q}$ के रूप में लिखा जाता है, जहाँ P और Q बहुपद हैं और Q एक **शून्येतर (non-zero) बहुपद** है, **परिमेय व्यंजक** कहलाता है।
- प्रत्येक बहुपद एक परिमेय व्यंजक होता है, परन्तु प्रत्येक परिमेय व्यंजक का बहुपद होना आवश्यक नहीं है।

परिमेय व्यंजकों पर संक्रियाएँ

(1) परिमेय संख्याओं का योग तथा व्यवकलन: दो परिमेय व्यंजकों का योग और अन्तर हमेशा एक परिमेय व्यंजक ही होता है। इन्हें हर (denominator) का ल.स. लेकर जोड़ा या घटाया जाता है।

(2) परिमेय व्यंजकों का गुणा और भाग:

- गुणा का सूत्र: $\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$
- भाग का सूत्र: $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$ (भाग करने के लिए दूसरे व्यंजक का व्युत्क्रम लेकर गुणा करते हैं)।

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. $3x^2 - x - 4$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मध्य पद को विभक्त करने पर: $3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$।

प्रश्न 2. यदि $x - \frac{1}{x} = 2$ है, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दोनों पक्षों का वर्ग करने पर: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2)^2$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 4$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 4$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$।

प्रश्न 3. $P(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2)$ तथा $Q(x) = x^2 - 4$ का ल.स. (LCM) ज्ञात कीजिए।

उत्तर- **$P(x)$ के गुणनखंड:** $(x-2)(x-2)(x-1) = (x-2)^2(x-1)$।

$Q(x)$ के गुणनखंड: $(x-2)(x+2)$।

ल.स. के लिए सभी चरों की अधिकतम घात लेते हैं: ल.स. = $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$।

प्रश्न 4. $(x + 5)(x - 5)$ **का गुणनफल क्या होगा?**

उत्तर- यहाँ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$ सूत्र का प्रयोग होगा।

$a = x$ और $b = 5$ रखने पर: $(x)^2 - (5)^2 = x^2 - 25$ प्राप्त होता है।

प्रश्न 5. पूर्ण वर्ग विधि से $x^2 + 6x + 9$ का गुणनखंडन कीजिए।

उत्तर- इसे सूत्र $\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यहाँ $a = x$ और $b = 3$ है। अतः $x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = (x+3)^2$।

2

रैखिक समीकरण

परिचय

इस अध्याय में हम एक चर और दो चरों वाले **रैखिक समीकरणों** की अवधारणा, उनकी रचना और उन्हें हल करने की विधियों का अध्ययन करेंगे। हम बीजीय और आलेखीय (ग्राफिकल) विधियों के माध्यम से दैनिक जीवन की शाब्दिक समस्याओं को समीकरण में बदलकर उनका हल ज्ञात करना भी सीखेंगे।

रैखिक समीकरण

- वह समीकरण जिसमें समता '=' का चिह्न हो और चर की अधिकतम घात 1 हो, **रैखिक समीकरण** कहलाता है।
- समता का चिह्न दर्शाता है कि बायाँ पक्ष (LHS) और दायाँ पक्ष (RHS) आपस में बराबर हैं।
- एक चर वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप: $ax + b = 0$ (जहाँ $a \neq 0$ और a, b अचर हैं)।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप: $ax + by + c = 0$ (जहाँ a और b दोनों एक साथ शून्य नहीं हो सकते)।

एक चर में रैखिक समीकरण बनाना

- शाब्दिक (दैनिक जीवन) समस्याओं को गणितीय रूप देने के लिए अज्ञात राशि को चर (जैसे x या y) मानकर, दी गई शर्तों के अनुसार समीकरण बनाया जाता है।

एक चर में रैखिक समीकरणों का हल

- चर का वह मान जिसे समीकरण में रखने पर LHS और RHS बराबर हो जाएँ, समीकरण का **हल** कहलाता है।
- समीकरण के संतुलन को बनाए रखने के लिए दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी, घटाई, गुणा या भाग की जा सकती है।
- पदों को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने की प्रक्रिया **स्थानान्तरण** कहलाती है, जिसमें पद का चिह्न बदल जाता है ('+' का '-' और '-' का '+')।
- **सूत्र रूप में हल:** समीकरण $ax + b = 0$ का हल $x = -\frac{b}{a}$ होता है।

शाब्दिक प्रश्न

- आयु, संख्या, परिमाप आदि से सम्बंधित वास्तविक जीवन की समस्याओं को पढ़कर, अज्ञात राशि को 'x' मानकर एक चर वाले रैखिक समीकरण में बदला जाता है और फिर हल किया जाता है।

दो चरों में रैखिक समीकरण

- दो चरों वाले रैखिक समीकरण ($ax + by + c = 0$) के **अनंत (असंख्य) हल** होते हैं।
- y के प्रत्येक मान के लिए x का एक अद्वितीय हल प्राप्त होता है, जिसे इस सूत्र से निकाला जा सकता है:

$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ ।

दो चरों में रैखिक समीकरणों के आलेख

- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख (ग्राफ) हमेशा एक **सरल रेखा** होता है।
- ग्राफ खींचने के लिए कार्तीय तल (x-अक्ष और y-अक्ष) पर x और y के कम से कम दो मान निकालकर (क्रमित युग्म बनाकर) उन्हें आलेखित किया जाता है और मिलाया जाता है।
- जो भी बिंदु (निर्देशांक) इस रेखा पर स्थित होते हैं, वे समीकरण के हल होते हैं।

दो चरों के रैखिक समीकरण का निकाय

जब दो चरों वाले दो रैखिक समीकरणों को एक साथ लिया जाता है, तो वे समीकरणों का **निकाय** (System) कहलाते हैं।

आलेखीय विधि:

- **प्रतिच्छेदी रेखाएँ**: दोनों ग्राफ एक बिंदु पर काटते हैं। निकाय का **एक अद्वितीय हल** होता है।
- **संपाती रेखाएँ**: दोनों ग्राफ एक ही रेखा पर बनते हैं (एक के ऊपर एक)। निकाय के **अनंत हल** होते हैं।
- **समांतर रेखाएँ**: दोनों ग्राफ एक-दूसरे को कभी नहीं काटते। निकाय का **कोई हल नहीं** होता।

बीजीय विधि:

(i) प्रतिस्थापन विधि: एक समीकरण से एक चर (जैसे x) का मान निकालकर उसे दूसरे समीकरण में **प्रतिस्थापित** किया जाता है, जिससे वह एक चर का समीकरण बन जाता है।

(ii) विलोपन विधि: दोनों समीकरणों को किसी संख्या से गुणा करके किसी एक चर के गुणांक समान किये जाते हैं। फिर जोड़कर या घटाकर उस चर का **विलोपन** (गायब) कर दिया जाता है।

शाब्दिक प्रश्न

- दो अज्ञात राशियों वाली समस्याओं (जैसे दो कारों की गति, दो वस्तुओं का मूल्य, भिन्न आदि) को x और y मानकर दो समीकरणों का निकाय बनाया जाता है और फिर बीजीय विधि से हल किया जाता है।

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. रैखिक समीकरण $5(2x-4)+3x+4y-7=0$ में y का गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समीकरण को हल करने पर:

$10x - 20 + 3x + 4y - 7 = 0$

$\Rightarrow 13x + 4y - 27 = 0$।

यहाँ y के साथ 4 गुणा हो रहा है, अतः **y का गुणांक 4** है।

प्रश्न 2. यदि $y=3$ को $ax+by+c=0$ के रूप में व्यक्त किया जाए, तो a का मान क्या होगा?

उत्तर- $y=3$ को हम $0 \cdot x + 1 \cdot y - 3 = 0$ लिख सकते हैं।

व्यापक रूप $ax+by+c=0$ से तुलना करने पर, x का गुणांक $a = 0$ प्राप्त होता है।

प्रश्न 3. समीकरण $2x - 3y = 6$ का आलेख y-अक्ष को किस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है?

उत्तर- y-अक्ष पर x = 0 होता है। समीकरण में x=0 रखने पर:

$2(0) - 3y = 6 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2$।

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु $(0,-2)$ है।

प्रश्न 4. प्रतिस्थापन या विलोपन विधि से समीकरण निकाय $x + y = 5$ और $x - y = 1$ को हल कीजिए।

उत्तर- विलोपन विधि (दोनों को जोड़ने पर):

$(x + y) + (x - y) = 5 + 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$।

$x = 3$ समीकरण 1 में रखने पर: $3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$। हल: $x = 3, y = 2$।

प्रश्न 5. दो संख्याओं का योग 15 है और उनका अंतर 3 है। रैखिक समीकरण बनाकर संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना संख्याएँ x और y हैं।

समीकरण: $x + y = 15$ और x-y=3।

दोनों को जोड़ने पर $2x = 18 \Rightarrow x = 9$।

x का मान रखने पर $9 + y = 15 \Rightarrow y = 6$। संख्याएँ **9 और 6** हैं।

3

द्विघात समीकरण

परिचय

इस अध्याय में हम **द्विघात समीकरण** और उसे हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे। हम सीखेंगे कि कैसे किसी द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर रखकर समीकरण बनाया जाता है। इसके अलावा, हम गुणनखंड विधि और द्विघात सूत्र का उपयोग करके वास्तविक जीवन की शाब्दिक समस्याओं को हल करना भी सीखेंगे।

द्विघात समीकरण

- दो घात वाला बहुपद **द्विघात बहुपद** कहलाता है।
- जब एक द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर बनाया जाता है, तो यह एक **द्विघात समीकरण** कहलाता है।

एक द्विघात समीकरण का मानक रूप

- एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ (जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c अचर राशियाँ हैं तथा x एक चर है) को द्विघात समीकरण का **मानक रूप** कहते हैं।
- प्रत्येक द्विघात समीकरण को हमेशा मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है (जैसे $3x^2 = 5$ को $3x^2 - 5 = 0$ लिखा जा सकता है)।

द्विघात समीकरण का हल

- चर का वह मान, जिसे समीकरण के बायें तथा दायें पक्ष में रखने पर दोनों पक्ष बराबर हो जाते हैं, द्विघात समीकरण का **मूल या हल** कहलाता है।
- द्विघात समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए दो बीजीय विधियाँ हैं: गुणनखंड विधि और द्विघात सूत्र।

गुणनखण्ड विधि

- इस विधि में द्विघात समीकरण को रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है (प्रायः मध्य पद को विभक्त करके)।
- प्रत्येक रैखिक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखकर समीकरण के मूल (x के मान) ज्ञात किये जाते हैं।

द्विघात सूत्र

1. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का **द्विघात सूत्र** निम्न है:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. व्यंजक $b^2 - 4ac$ **विविक्तकर** (Discriminant, D) कहलाता है, जो समीकरण के मूलों की प्रकृति बताता है:

- यदि **D > 0**: समीकरण के दो वास्तविक और भिन्न मूल होंगे।
- यदि **D = 0**: समीकरण के दो वास्तविक और समान मूल होंगे (प्रत्येक $-\frac{b}{2a}$)।
- यदि **D < 0**: समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होगा (क्योंकि ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल वास्तविक नहीं होता)।

शाब्दिक समस्याएँ

- संख्या, आयु, क्षेत्रफल आदि से सम्बंधित दैनिक जीवन की समस्याओं को पहले गणितीय भाषा (द्विघात समीकरण) में बदला जाता है।
- इसके बाद गुणनखंड विधि या द्विघात सूत्र का प्रयोग करके उस द्विघात समीकरण को हल कर अज्ञात राशि का मान निकाला जाता है।

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. जाँच कीजिए कि क्या $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ एक द्विघात समीकरण है?

उत्तर- इसे सरल करने पर:

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2(x^2+1) = 5x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

प्राप्त होता है।

चूँकि यह $ax^2 + bx + c = 0$ के मानक रूप में है, अतः यह एक **द्विघात समीकरण** है।

प्रश्न 2. गुणनखण्ड विधि द्वारा समीकरण $6x^2 + 7x - 3 = 0$ को हल कीजिए।

उत्तर- मध्य पद को विभक्त करने पर: $6x^2 + 9x - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = 0$

$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 1) = 0$

अतः $x = -\frac{3}{2}$ और $x = \frac{1}{3}$ समीकरण के हल हैं।

प्रश्न 3. द्विघात सूत्र द्वारा समीकरण $6x^2 - 19x + 15 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यहाँ $a = 6, b = -19, c = 15$ है।

विविक्तकर $D = (-19)^2 - 4(6)(15) = 361 - 360 = 1$

सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ से:

$x = \frac{19 \pm 1}{12}$

अतः मूल $\frac{5}{3}$ और $\frac{3}{2}$ हैं।

प्रश्न 4. m का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $2x^2 - mx + 1 = 0$ के मूल समान हों।

उत्तर- समान मूलों के लिए $D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$ होना चाहिए।

यहाँ $a = 2, b = -m, c = 1$ है।

अतः $(-m)^2 - 4(2)(1) = 0 \Rightarrow m^2 - 8 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$।

प्रश्न 5. दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल 74 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना संख्याएँ x और $x + 2$ हैं।

$x^2 + (x + 2)^2 = 74 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$

गुणनखंड: $(x + 7)(x - 5) = 0$। प्राकृत संख्या ऋणात्मक नहीं होती, अतः $x = 5$। संख्याएँ 5 और 7 हैं।

4

समांतर श्रेढ़ी

परिचय

प्रकृति और हमारे दैनिक जीवन में कई वस्तुएँ एक विशेष पैटर्न का अनुसरण करती हैं। इस अध्याय में हम एक ऐसे ही विशेष संख्या पैटर्न का अध्ययन करेंगे जिसे **समांतर श्रेढ़ी** कहते हैं। हम इसका व्यापक पद (nवाँ पद) और इसके प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करने के सूत्रों और विधियों को सीखेंगे।

कुछ संख्या पैटर्न

- संख्याओं की सूची में प्रत्येक संख्या को **पद** कहा जाता है।
- सूची में संख्याओं को सामान्यतः $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ या $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, जो क्रमशः पहला, दूसरा और nवाँ पद कहलाते हैं।
- इन सूचियों को **अनुक्रम** या **संख्या पैटर्न** भी कहा जाता है।

समांतर श्रेढ़ी

- एक विशेष प्रकार का पैटर्न, जिसमें पहले पद को छोड़कर प्रत्येक पद, अपने पूर्व पद में एक निश्चित राशि (धनात्मक या ऋणात्मक) जोड़ने से प्राप्त होता है, **समांतर श्रेढ़ी (AP)** कहलाता है।
- प्रथम पद को प्रायः **'a'** तथा निश्चित राशि (सार्वअन्तर) को **'d'** द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
- समांतर श्रेढ़ी का **मानक रूप** $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ होता है।

समांतर श्रेढ़ी का व्यापक (nवाँ) पद

- यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्वअन्तर d हो, तो उसका **व्यापक पद (nवाँ पद)** ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है:
- **सूत्र:** $t_n = a + (n-1)d$
- यहाँ n पदों की संख्या को दर्शाता है।

एक समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योगफल

- किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योगफल (S_n) को ज्ञात करने के लिए इस सूत्र का प्रयोग किया जाता है:
- **सूत्र:** $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]}$
- यदि समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अन्तिम पद l (या t_n) तथा पदों की संख्या n हो, तो योगफल का एक अन्य सूत्र यह है:
- **वैकल्पिक सूत्र:** $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a + 1)}$

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. समांतर श्रेढ़ी $16, 11, 6, 1, -4, \ldots$ का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

उत्तर- यहाँ $a = 16$ और $d = 11 - 16 = -5$ है ।

सूत्र $t_n = a + (n-1)d$ का प्रयोग करने पर:

$t_{15} = 16 + (15-1)(-5) = 16 + 14(-5) = 16 - 70 = -54$ ।

प्रश्न 2. एक AP का सार्वअन्तर 5 तथा 10वाँ पद 43 है। इसका प्रथम पद ज्ञात कीजिए ।

उत्तर- यहाँ $d = 5$ और $t_{10} = 43$ है ।

सूत्र $t_{10} = a + 9d$ में मान रखने पर:

$43 = a + 9(5) \Rightarrow 43 = a + 45 \Rightarrow a = -2$ ।

अतः प्रथम पद -2 है ।

प्रश्न 3. समांतर श्रेढ़ी $11, 16, 21, 26 \ldots.$ के प्रथम 12 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

उत्तर- यहाँ $a = 11$, $d = 16 - 11 = 5$ और $n = 12$ है ।

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ से:

$S_{12} = \frac{12}{2}[2(11) + (11)5] = 6[22 + 55] = 6 \times 77 = 462$ ।

प्रश्न 4. समांतर श्रेढ़ी $2, 4, 6, 8, 10....$ के कितने पदों का योगफल 210 होगा?

उत्तर- यहाँ $a = 2, d = 2$ और $S_n = 210$ है ।

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में रखने पर:

$210 = \frac{n}{2}[4 + (n-1)2] \Rightarrow 420 = n(2n+2) \Rightarrow n^2 + n - 210 = 0$ ।

हल करने पर $n = 14$ (ऋणात्मक मान अमान्य) ।

प्रश्न 5. योगफल ज्ञात कीजिए: $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59$ ।

उत्तर- यहाँ $a = 2, d = 3$ और $t_n = 59$ है ।

पहले n निकालें: $59 = 2 + (n-1)3 \Rightarrow 57 = 3(n-1) \Rightarrow n = 20$ ।

अब योगफल $S_{20} = [2 + 59] = 10 \times 61 = 610$

5

प्रतिशतता तथा इसके अनुप्रयोग

परिचय

इस अध्याय में हम **प्रतिशत** (अर्थात 'प्रति सौ') की अवधारणा और उसे भिन्न या दशमलव में बदलने की विधियों का अध्ययन करेंगे। साथ ही, इसके व्यावहारिक अनुप्रयोगों जैसे लाभ-हानि, बट्टा, साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज और वृद्धि तथा अवमूल्यन की गणना करना सीखेंगे।

प्रतिशत

- **प्रतिशत** शब्द लैटिन शब्द 'परसेंटम' से लिया गया है, जिसका अर्थ है **"प्रति सौ"** अथवा "सौ में" से।
- एक भिन्न जिसका हर 100 है, प्रतिशत के रूप में पढ़ी जाती है। इसे दर्शाने के लिए **'%'** चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

एक भिन्न का प्रतिशत में परिवर्तन और विलोमतः

- **भिन्न को प्रतिशत में बदलना**: भिन्न को 100 से गुणा करके सरल करते हैं तथा **%** का चिह्न लगा देते हैं।
- **प्रतिशत को भिन्न में बदलना**: **%** का चिह्न हटा देते हैं तथा संख्या को $\frac{1}{100}$ से गुणा (या 100 से भाग) करके सरल करते हैं।

एक दशमलव का प्रतिशत में परिवर्तन और विलोमतः

- **दशमलव को प्रतिशत में बदलना**: दशमलव बिंदु को दो स्थानों तक दायीं ओर ले जाते हैं और **%** का चिह्न लगाते हैं।
- **प्रतिशत को दशमलव में बदलना**: **%** का चिह्न हटाते हैं और दशमलव बिंदु को बायीं ओर दो स्थानों तक ले जाते हैं।

एक राशि अथवा संख्या की प्रतिशतता का परिकलन

- किसी राशि की निर्दिष्ट प्रतिशतता ज्ञात करने के लिए, प्रतिशत को भिन्न या दशमलव में बदलते हैं और फिर उसे दी गई संख्या से गुणा करते हैं।
- **सूत्र**: x का $y\% = x \times \left(\frac{y}{100}\right)$

प्रतिशतता के अनुप्रयोग

लाभ और हानि

1. क्रय मूल्य (क्र.मू.): वह मूल्य जिस पर एक वस्तु खरीदी जाती है।

2. विक्रय मूल्य (वि.मू.): वह मूल्य जिस पर एक वस्तु बेची जाती है।

3. लाभ: जब वि.मू. > क्र.मू. हो। सूत्र: **लाभ = वि.मू. - क्र.मू.**

4. हानि: जब क्र.मू. > वि.मू. हो। सूत्र: **हानि = क्र.मू. - वि.मू.**

महत्वपूर्ण सूत्र:

- $\text{लाभ}\,\% = \left(\frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}}\right) \times \mathbf{100\%}$
- $\text{हानि}\,\% = \left(\frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}}\right) \times \mathbf{100\%}$
- $\text{वि.मू.} = \frac{\text{क्र.मू.} \times (\mathbf{100} + \text{लाभ}\,\%)}{\mathbf{100}}$
- $\text{वि.मू.} = \frac{\text{क्र.मू.} \times (\mathbf{100} - \text{हानि}\,\%)}{\mathbf{100}}$

बट्टा

- **बट्टा (Discount)**: वस्तु के अंकित मूल्य (सूची मूल्य) पर दी जाने वाली कटौती होती है।
- **अंकित मूल्य**: वस्तु पर लिखा गया या छपा हुआ मूल्य।
- **सूत्र**: वास्तविक विक्रय मूल्य $=$ अंकित मूल्य $-$ बट्टा

साधारण ब्याज

- **मूलधन (P)**: उधार ली गई या दी गई राशि।
- **ब्याज (I)**: उधार लिए पैसे को प्रयोग करने के लिए दी गई अतिरिक्त राशि।
- **मिश्रधन (A)**: मूलधन और ब्याज का योग। $A = P + I$
- **साधारण ब्याज का सूत्र**: $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{P \times R \times T}}{\mathbf{100}}$ (जहाँ R = दर % प्रति वर्ष, T = समय)

चक्रवृद्धि ब्याज

- जब निर्दिष्ट समय के पश्चात ब्याज मूलधन में जोड़ दिया जाता है और अगले समय के लिए ब्याज इस नए मूलधन पर निकाला जाता है, तो उसे **चक्रवृद्धि ब्याज** कहते हैं।
- ब्याज जुड़ने की अवधि को **रूपान्तरण अवधि** कहते हैं।

चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र

- **मिश्रधन (A) का सूत्र**: $\mathbf{A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n}$ (जहाँ n = अवधियों/वर्षों की संख्या)
- **चक्रवृद्धि ब्याज (CI) का सूत्र**: $\mathbf{CI = A - P = P\left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n - 1\right]}$

बढ़ोतरी तथा अवमूल्यन की दर

- यदि प्रारंभिक मूल्य V_o, दर $r\%$ और समय n हो, तो:
- **बढ़ोतरी (Growth) का सूत्र**: $V_n = V_o\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$
- **अवमूल्यन (Depreciation) का सूत्र**: $V_n = V_o\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. 360 का कितना प्रतिशत 144 है?

उत्तर- माना 360 का $x\% = \mathbf{144}$ है।

अतः $\frac{x}{100} \times 360 = 144$

इसे हल करने पर $x = \frac{144 \times 100}{360} = 40$ प्राप्त होता है।

इसलिए 360 का 40%, 144 है।

प्रश्न 2. एक दुकानदार एक वस्तु को ₹360 में खरीदता है और इसे ₹270 में बेच देता है। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यहाँ **क्र.मू. = ₹360** और **वि.मू. = ₹270** है।

चूँकि **क्र.मू. > वि.मू.**, इसलिए हानि $= \mathbf{360 - 270 = }$ **₹90** हुई

हानि प्रतिशत $= \frac{90}{360} \times 100\% = \mathbf{25\%}$

प्रश्न 3. एक कोट का अंकित मूल्य ₹2400 है। इसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि 12% बट्टा दिया जा रहा है।

उत्तर- दिया जाने वाला बट्टा = ₹2400 का 12% $= 2400 \times \frac{12}{100} =$ ₹288

वास्तविक विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य − बट्टा $= 2400 - 288 =$ ₹2112

प्रश्न 4. साधारण ब्याज की किस दर प्रतिवर्ष से ₹5000 की धनराशि 3 वर्ष में ₹6050 हो जाएगी?

उत्तर- यहाँ मूलधन (P) = ₹5000, मिश्रधन (A) = ₹6050, समय (T) = 3 वर्ष।

ब्याज $(\boldsymbol{I}) = 6050 - 5000 =$ ₹1050

दर $\boldsymbol{R} = \frac{(I \times 100)}{(P \times T)} = \frac{1050 \times 100}{5000 \times 3} = 7\%$ वार्षिक।

प्रश्न 5. ₹20,000 पर 3 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर पर चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित होता है।

उत्तर- सूत्र $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$ से,

मिश्रधन $A = 20000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 20000\left(\frac{21}{20}\right)^3 =$ ₹23152.50

चक्रवृद्धि ब्याज $= 23152.50 - 20000 =$ ₹3152.50

6

किस्तों में खरीदारी

परिचय

इस अध्याय में हम **किस्त योजना** के बारे में अध्ययन करेंगे। हम जानेंगे कि कैसे महंगी वस्तुएं आंशिक भुगतान (तुरंत भुगतान) करके और शेष राशि को किस्तों में चुकाकर खरीदी जा सकती हैं। इसके अंतर्गत हम साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज के आधार पर किस्त की राशि, ब्याज दर और नकद मूल्य की गणना करना सीखेंगे।

किस्तों में खरीदारी योजना

- **नकद मूल्य**: यह वह राशि है जिसमें कोई वस्तु पूरे पैसों का एक साथ भुगतान करने पर खरीदी जा सकती है।
- **तुरन्त भुगतान**: यह वह आंशिक राशि है जो ग्राहक द्वारा वस्तु खरीदते समय नकद दी जाती है।
- **किस्त**: यह वह राशि है जो ग्राहक द्वारा शेष मूल्य को चुकाने के लिए एक निश्चित समयांतराल (मासिक, छमाही या वार्षिक) पर दी जाती है।
- **किस्त योजना के अन्तर्गत ब्याज**: चूंकि शेष राशि का भुगतान बाद में होता है, इसलिए विक्रेता कुछ अतिरिक्त पैसा लेता है, जिसे **ब्याज** कहते हैं।

किस्त योजना में ब्याज ज्ञात करना

जब नकद मूल्य, तुरंत भुगतान, किस्तों की संख्या और किस्त की राशि दी गई हो, तो हम साधारण ब्याज के सूत्र का उपयोग करके ब्याज दर ($r\%$) ज्ञात कर सकते हैं।

विधि:

- दिया गया कुल ब्याज $=$ (तुरंत भुगतान $+$ कुल किस्तों की राशि) $-$ नकद मूल्य।
- प्रत्येक माह के लिए शेष राशि निकालकर 1 माह का कुल **मूलधन** ज्ञात करते हैं।
- **सूत्र**: ब्याज $= \dfrac{\text{कुल मूलधन} \times r \times 1}{100 \times 12}$

किस्त की राशि ज्ञात करना

जब नकद मूल्य, तुरंत भुगतान, ब्याज की दर और किस्तों की संख्या दी गई हो, तो प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात की जाती है।

विधि:

- माना प्रत्येक किस्त की राशि x है।
- कुल ब्याज और कुल मूलधन को x के रूप में व्यक्त करके साधारण ब्याज के सूत्र में रखते हैं और समीकरण हल करके x निकालते हैं।

नकद मूल्य ज्ञात करना

जब तुरंत भुगतान, किस्त की राशि, ब्याज की दर और किस्तों की संख्या दी गई हो, तो वस्तु का **नकद मूल्य** ज्ञात किया जाता है।

विधि:

- माना नकद मूल्य x है।
- दिए गए ब्याज और कुल मूलधन को x के पदों में लिखकर, साधारण ब्याज सूत्र का प्रयोग करके समीकरण को हल किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज युक्त समस्याएं

जब किस्तें लम्बे समय (जैसे वार्षिक या छमाही) के लिए दी जाती हैं, तो वहाँ साधारण ब्याज के बजाय **चक्रवृद्धि ब्याज** का प्रयोग होता है।

विधि:

- प्रत्येक किस्त का **तत्काल मूल्य (P)** ज्ञात किया जाता है।
- **सूत्र**: यदि ब्याज दर $R\%$ और किस्त x है, तो nवीं किस्त का तत्काल मूल्य P_n इस प्रकार होगा: $x = P_n\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$
- सभी किस्तों के तत्काल मूल्यों का योग $(P_1 + P_2 + \cdots) =$ शेष देय राशि (नकद मूल्य – तुरंत भुगतान)।

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. एक मेज को ₹450 नकद अथवा ₹210 तुरन्त भुगतान तथा उसके पश्चात ₹125 की दो मासिक किस्तों में बेचा जाता है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल भुगतान $= 210 + (125 \times 2) = 460$ रु।

ब्याज $= 460 - 450 = 10$ रु।

पहले माह का मूलधन = 240, दूसरे माह = 115

कुल मूलधन = 355 रु।

सूत्र हल करने पर = $\frac{355 \times r \times 1}{100 \times 12} = 10$

$\mathbf{r = 33.8\%}$ वार्षिक।

प्रश्न 2. एक छत वाले पंखे का नकद मूल्य ₹1940 है। यह ₹420 तुरन्त भुगतान तथा तीन समान प्रतिमाह किस्तों में उपलब्ध है। यदि ब्याज 16% वार्षिक है, तो प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना किस्त x है।

कुल भुगतान $= 420 + 3x$

ब्याज $= 3x - 1520$

1 माह का कुल मूलधन $= (4560 - 3x)$

समीकरण हल करने पर = $(3x - 1520) = \frac{(4560 - 3x) \times 16 \times 1}{100 \times 12}$

x = ₹520

प्रश्न 3. एक मिक्सी ₹360 की तत्काल अदायगी तथा ₹390 प्रति माह की तीन समान किस्तों पर खरीदी गई। यदि ब्याज की दर 16% वार्षिक है, तो मिक्सी का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना नकद मूल्य x है।

कुल भुगतान $= 360 + 1170 = 1530$ रु

ब्याज = $1530 - x$

कुल मूलधन = $3x - 2250$

हल करने पर नकद मूल्य = $(1530 - x) = \frac{(3x - 2250)\times 16\times 1}{100\times 12}$

$\mathbf{x = ₹1500}$

प्रश्न 4. एक रेफ्रिजरेटर ₹12000 नकद अथवा ₹3600 के तुरंत भुगतान तथा प्रति छमाही की 2 समान किस्तों पर उपलब्ध है। यदि 20% वार्षिक दर (प्रति छमाही संयोजित) है, तो किस्त की राशि?

उत्तर- शेष राशि $= 12000 - 3600 = 8400$ रु

दर $= 10\%$ प्रति छमाही

चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र से: $\frac{10}{11}x + \frac{100}{121}x = 8400$

हल करने पर प्रत्येक किस्त, $\mathbf{x = ₹4840}$

प्रश्न 5. एक सिलाई मशीन ₹2600 नकद अथवा ₹1000 नकद भुगतान और ₹550 की तीन बराबर मासिक किस्तों पर उपलब्ध है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल भुगतान $= 1000 + (550 \times 3) = 2650$ रु

ब्याज $= 2650 - 2600 = 50$ रु

मूलधन पहले माह = 1600, दूसरे = 1050, तीसरे = 500

कुल मूलधन = 3150 रु

$\frac{3150\times r\times 1}{100\times 12} = 50 \Rightarrow \mathbf{r = 19\frac{1}{21}}\%$ वार्षिक

7

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक

परिचय

इस अध्याय में हम सांख्यिकी के अंतर्गत आँकड़ों की **केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक** का अध्ययन करेंगे। आँकड़ों के विशाल समूह का प्रतिनिधित्व करने वाले औसत या मध्य मान को केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक कहते हैं। हम अवर्गीकृत और वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य, माध्यक और बहुलक निकालने की विधियों और उनके सूत्रों को सीखेंगे।

अंकगणितीय औसत या माध्य

- **माध्य (Mean)** वह मान है जो सभी प्रेक्षणों के योग को उनकी कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।
- इसे गणितीय रूप में $\bar{x}$ (x बार) से दर्शाया जाता है।

यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य

- अवर्गीकृत (कच्चे) आँकड़ों का माध्य निकालने के लिए सभी प्रेक्षणों को जोड़ा जाता है और कुल संख्या से भाग दिया जाता है।
- **सूत्र:**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

(जहाँ n कुल प्रेक्षणों की संख्या है)।

अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

- जब आँकड़े बारंबारता (f_i) के साथ दिए हों, तो प्रत्येक प्रेक्षण (x_i) को उसकी संगत बारंबारता से गुणा करके योग निकाला जाता है।
- **सूत्र:** $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

वर्गीकृत आँकड़ों (वर्ग अंतराल) में माध्य निकालने की तीन मुख्य विधियाँ हैं:

(i) प्रत्यक्ष विधि: इसमें वर्ग चिह्न (x_i) निकालकर f_i से गुणा करते हैं।

- **सूत्र:** $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) कल्पित माध्य विधि: इसमें किसी मध्य मान को **कल्पित माध्य (A)** मान लिया जाता है और विचलन $d_i = x_i - A$ निकालते हैं।

- **सूत्र:** $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) पद-विचलन विधि: गणना को आसान बनाने के लिए विचलन d_i को वर्ग माप (h) से भाग देकर u_i निकाला जाता है।

- **सूत्र:** $\bar{x} = A + h \times \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

माध्यक

- **माध्यक** वह मान है जो आँकड़ों को ठीक दो बराबर भागों में बाँटता है, जब उन्हें आरोही (बढ़ते) या अवरोही (घटते) क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।

यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्यक

1. सबसे पहले आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखते हैं।

2. यदि पदों की संख्या (n) **विषम (Odd)** हो, तो:

- **सूत्र:** माध्यक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद

3. यदि पदों की संख्या (n) **सम (Even)** हो, तो:

- **सूत्र:** माध्यक $= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

- इसमें सबसे पहले **संचयी बारंबारता (cf)** निकाली जाती है।
- कुल बारंबारता $(N = \Sigma f_i)$ का आधा $\left(\frac{N}{2}\right)$ निकालते हैं।
- वह प्रेक्षण जिसका $cf, \frac{N}{2}$ से ठीक बड़ा होता है, वही माध्यक कहलाता है।

बहुलक

- **बहुलक** वह मान है जिसकी बारंबारता (frequency) सबसे अधिक होती है, यानी जो आँकड़ों में सबसे ज्यादा बार दोहराया जाता है।

यथाप्राप्त आँकड़ों का बहुलक

- कच्चे आँकड़ों में बस यह देखा जाता है कि कौन-सी संख्या सबसे अधिक बार आई है। वही संख्या बहुलक होती है।

अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

- दी गई बारंबारता सारणी में जिस प्रेक्षण (x_i) के सामने की बारंबारता (f_i) सबसे बड़ी (अधिकतम) होती है, वही प्रेक्षण बहुलक होता है।

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. प्रथम 5 प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रथम 5 प्राकृत संख्याएँ: 1, 2, 3, 4, 5 हैं।

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{कुल संख्या}}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

अतः माध्य **3** है।

प्रश्न 2. आँकड़ों 15, 14, 19, 20, 14, 15, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए आँकड़ों में, संख्या '14' सबसे अधिक बार (तीन बार) आई है।

चूँकि जिस प्रेक्षण की बारंबारता सबसे अधिक होती है वही बहुलक होता है, इसलिए इन आँकड़ों का बहुलक **14** है।

प्रश्न 3. आँकड़ों 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- आँकड़े पहले से ही आरोही क्रम में हैं। यहाँ पदों की संख्या $n = 7$ (विषम) है।

$$\text{माध्यक} = \frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद} \Rightarrow \frac{7+1}{2} = 4 \text{ वाँ पद।}$$

आँकड़ों में 4वाँ पद 9 है, अतः माध्यक **9** है।

प्रश्न 4. यदि 10 प्रेक्षणों का माध्य 15 है, तो सभी प्रेक्षणों का कुल योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- सूत्र के अनुसार: माध्य $= \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

यहाँ माध्य = 15 और संख्या = 10 है।

अतः प्रेक्षणों का योग $=$ माध्य $\times$ संख्या $= 15 \times 10 = \mathbf{150}$

प्रश्न 5. आँकड़ों 2, 4, 6, 8, 10, 12 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यहाँ आँकड़े आरोही क्रम में हैं और पदों की संख्या $n = 6$ (सम) है।

माध्यक $= \frac{\left(\frac{6}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{6}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{3\text{वाँ पद} + 4\text{वाँ पद}}{2} = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = \mathbf{7}$

8

प्रायिकता से परिचय

परिचय

इस अध्याय में हम **प्रायिकता** का अध्ययन करेंगे, जो अनिश्चितता की स्थितियों को गणितीय रूप में मापने की एक विधि है। हम यादृच्छिक प्रयोगों, उनके परिणामों, घटनाओं और किसी घटना के घटने या न घटने की प्रायिकता की गणना करने वाले महत्वपूर्ण सूत्रों को सीखेंगे।

यादृच्छिक प्रयोग

- वह प्रयोग जिसके सभी संभव परिणाम पहले से ज्ञात हों, लेकिन किसी विशेष परिणाम की निश्चित भविष्यवाणी नहीं की जा सके, **यादृच्छिक प्रयोग** कहलाता है।

परिणाम तथा प्रतिदर्श समष्टि

- **परिणाम:** किसी यादृच्छिक प्रयोग के प्रत्येक संभव नतीजे (result) को परिणाम कहते हैं।
- **प्रतिदर्श समष्टि:** किसी प्रयोग के सभी संभव परिणामों के समूह (collection) को प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है।

घटना तथा उसकी प्रायिकता

- **घटना:** प्रयोग के परिणामों के किसी विशेष संग्रह (collection) या हिस्से को घटना कहा जाता है।
- किसी घटना E के घटने की **प्रायिकता P(E)** को अनुकूल परिणामों और कुल संभव परिणामों के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।
- **प्रायिकता का सूत्र:** $\mathrm{P(E)} = \dfrac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}}$
- किसी भी घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच स्थित होती है: $0 \leq P(E) \leq 1$

निश्चित और असंभव घटनाएँ

- **निश्चित घटना:** वह घटना जिसका घटित होना पूरी तरह से तय हो। इसकी प्रायिकता हमेशा **1** होती है।
- **असंभव घटना:** वह घटना जिसका घटित होना संभव न हो। इसकी प्रायिकता हमेशा **0** होती है।

पूरक घटनाएँ

- किसी घटना E के 'न घटने' की घटना को उसकी **पूरक घटना** कहते हैं, जिसे $\bar{E}$ (E बार) से दर्शाया जाता है।
- किसी घटना के घटने और न घटने की प्रायिकताओं का कुल योग हमेशा 1 होता है।
- **सूत्र:** $P(E) + (P(\bar{E}) = 1$ अथवा $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

TOP 5 QUESTIONS

प्रश्न 1. यदि किसी घटना E के घटने की प्रायिकता $P(E)$ = 0.35 है, तो E के 'नहीं घटने' की प्रायिकता $P(\bar{E})$क्या होगी?

उत्तर- सूत्र $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ का प्रयोग करने पर:

$0.35 + P(\bar{E}) = 1$

$P(\bar{E}) = 1 - 0.35 = 0.65$

अतः घटना के न घटने की प्रायिकता **0.65** है।

प्रश्न 2. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। एक अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- पासे के कुल संभव परिणाम (1, 2, 3, 4, 5, 6) = 6 हैं।

अभाज्य संख्याएँ (2, 3, 5) = 3 हैं (यह अनुकूल परिणाम हैं)।

प्रायिकता $\mathbf{P(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 3. एक बक्से में 3 नीली, 2 सफेद और 4 लाल गेंदें हैं। बक्से में से यादृच्छिक रूप से सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- कुल गेंदों की संख्या = 3 + 2 + 4 = 9 (कुल परिणाम)।

सफेद गेंदों की संख्या = 2 (अनुकूल परिणाम)।

सूत्र के अनुसार प्रायिकता P (सफेद)= $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{9}$

प्रश्न 4. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। एक 'इक्का' (Ace) प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52।

कुल इक्कों की संख्या = 4 (अनुकूल परिणाम)।

प्रायिकता P(E) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

प्रश्न 5. दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। कम से कम एक 'चित' (Head) प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी?

उत्तर- कुल संभव परिणाम: {HH, HT, TH, TT} = 4।

कम से कम एक चित वाले अनुकूल परिणाम (HH, HT, TH) = 3।

अतः प्रायिकता $P(E) = \frac{3}{4}$ ।