NIOS PYQ's SOLUTIONS

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS & ANSWERS

APRIL-2025

Your Path to Success

खंड – अ

Q1 - रेखा $4x - 5y - 32 = 0$ से बिन्दु (4, -6) की दूरी है

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{14}{41}$

(C) $\frac{7}{5}$

(D) $\frac{14}{\sqrt{41}}$

हल - (D) $\frac{14}{\sqrt{41}}$

Q2 – यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके लिए $A^2 = A$ है, तो $(I + A)^2 - 3A$ बराबर है

(A) I

(B) $2A$

(C) $3I$

(D) A

हल – (A) I

Q3 – यदि $A = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ और $A + A' = I$ है, तो α का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

हल - (B) $\frac{\pi}{3}$

Q4 – $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ का मान है

(A) – 7

(B) 7

(C) 8

(D) 10

हल - (A) – 7

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q5 – यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} है

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

हल - (B) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Q6 - k का वह मान, जिसके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय है, है

(A) $k = \frac{2}{3}$

(B) $k \neq \frac{2}{3}$

(C) $k \neq \frac{3}{2}$

(D) $k = \frac{3}{2}$

हल - (C) $k \neq \frac{3}{2}$

Q7 – समुच्चय A = {1, 2, 3} दिया गया है। समुच्चय A पर एक स्वतुल्य संबंध है

(A) R = {(1, 2), (1, 3)}

(B) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

(C) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)}

(D) R = {(3, 1), (2, 1), (1, 1)}

हल - (B) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Q8 – यदि $f(x) = x^3$ और $g(x) = cos3x$ है, तो $f \circ g(x)$ है

(A) $x^3.cos3x$

(B) $cos3x^3$

(C) $cos^3 3x$

(D) $3cosx^3$

हल - (C) $cos^3 3x$

Q9 - $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-cos2x)}}{x}$ बराबर है

(A) 1

(B) – 1

(C) 0

(D) इनमें से कोई नहीं

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

हल - (D) इनमें से कोई नहीं

Q10 – यदि $y = cotx°$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है

(A) $cosecx°$

(B) $cosecx°.cotx°$

(C) $-1°cosec^2x°$

(D) $-1°cosecx°.cotx°$

हल - (C) $-1°cosec^2x°$

Q11 – यदि $y = e^{-3logx}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है

(A) $-\frac{3}{x}$

(B) $-\frac{3}{x^2}$

(C) $-\frac{3}{x^4}$

(D) $-3x$

हल - (C) $-\frac{3}{x^4}$

Q12 - अन्तराल [0, 2] में $y = x^3 - 3x + 2$ का स्थानीय निम्निष्ठ मान है

(A) 6

(B) 4

(C) 2

(D) 0

हल - (D) 0

Q13 – यदि $\int 2^x dx = f(x) + C$ है, तो $f(x)$ है

(A) 2^x

(B) $2xlog_e2$

(C) $\frac{2^x}{log_e2}$

(D) $\frac{2^{x+1}}{x+1}$

हल - (C) $\frac{2^x}{log_e2}$

Q14 - अवकल समीकरण $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{2}{x^2-1}$ का समाकलन गुणक है

(A) $2x$

(B) $x^2 - 1$

(C) $x - 1$

(D) $\frac{1}{x^2-1}$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

हल – (B) $x^2 - 1$

Q15 - p का मान, जिसके लिए $p(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ एक एकक सदिश है, है

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\pm\sqrt{3}$

हल - (C) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Q16 - यदि शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $\vec{a} \times \vec{b}$ एक एकक सदिश है और $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ है, तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $-\frac{\pi}{2}$

हल – (C) $\frac{\pi}{6}$

Q17 – $(\hat{i} \times \hat{j}).\hat{k} + \hat{\imath}.\hat{j}$ का मान है

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) -1

हल - (B) 1

Q18 - मूलबिन्दु से समतल $3x - 4y + 12z = 3$ की दूरी है

(A) $\frac{3}{13}$ इकाई

(B) $\frac{19}{13}$ इकाई

(C) 3 इकाई

(D) 1 इकाई

हल - (A) $\frac{3}{13}$ इकाई

Q19 – समतल $2x - y + 2z + 7 = 0$ द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अंतः खंड है

(A) 2

(B) $\frac{7}{2}$

(C) $-\frac{7}{2}$

(D) -2

हल - (C) $-\frac{7}{2}$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q20 - उद्देश्य फलन का अधिकतम अथवा न्यूनतम, सुसंगत क्षेत्र के उस बिंदु पर होता है, जो

(A) सुसंगत क्षेत्र के अन्दर होता है

(B) सुसंगत क्षेत्र की सीमारेखा (boundary line) पर होता है

(C) सुसंगत क्षेत्र की सीमा के कोने पर होता है

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

हल - (C) सुसंगत क्षेत्र की सीमा के कोने पर होता है

Q21 - स्तंभ-I को स्तंभ-II के सही विकल्प से मिलाइए :

स्तंभ-I	**स्तंभ-II**
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **के लिए**	
(a) नाभियों के निर्देशांक होते हैं	**(P)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$
(b) उत्केन्द्रता होती है	**(Q)** $(0, \pm 2\sqrt{5})$
	(R) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$
	(S) $3/\sqrt{5}$

हल –

(a) नाभियों के निर्देशांक होते हैं → (R) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

(b) उत्केन्द्रता होती है → (P) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Q22 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) यदि $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}, x\,(\neq 1)\in R$, **तो** f **का परिसर है _____।**

(b) यदि $f: R \to R$, $f(x)=2x^3-1$ **द्वारा परिभाषित है, तो** f^{-1} **is ____, यदि** f^{-1} **का अस्तित्व है।**

हल – (a) $\{-1, 1\}$

(b) $f^{-1}(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q23 - सही कथन के लिए सत्य और गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

(a) यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y.$

(b) $\int_2^3 3^x dx = 18$

हल – (a) सत्य

(b) असत्य

Q24 - निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) यदि $f(x) = \frac{1}{4x^2+2x+1}$ है, तो इसका अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

(b) अवकलों का प्रयोग करके $\sqrt{49.5}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल – (a) $\frac{4}{3}$

(b) 7.036

Q25 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) बिन्दु (1,-2) से होकर जाने वाली और निर्देशांक अक्षों पर बराबर के अन्तः खंड काटने वाली रेखा का समीकरण है _____।

हल – $x + y + 1 = 0$

(b) वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$ की त्रिज्या है _____।

हल – $\sqrt{53}$

(c) परवलय $y^2 = 24x$ के नाभिलम्ब की लंबाई _____ है।

हल – 24.

(d) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ जो बिन्दुओं $(3, 0)$ और $(3\sqrt{2}, 2)$ से होकर गुजरता है, की उत्केन्द्रता है _____।

हल – $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q26 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) यदि A कोटि 2 का एक वर्ग आव्यूह है, तो |kA| बराबर है _____।

हल – $k^2|A|$

(b) यदि $F(x) = \begin{bmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{bmatrix}$ **है, तो** $F(x)F(y)$ **बराबर है** F **(____)।**

हल – $(x + y)$

(c) यदि $x \in N$ **और** $\begin{bmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{bmatrix} = 8$ **है, तो x का मान है _____।**

हल – 2

(d) यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & -7 & 3 \end{bmatrix}$ **है, तो अवयव (-7) का सहखण्ड है _____।**

हल – 2

Q27 - सही कथन के लिए सत्य और गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

(a) फलन $f(x) = x$ **के लिए अन्तराल [-1, 1] पर रोले का प्रमेय वैध है।**

हल – असत्य

(b) $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + logx)$

हल – सत्य

(c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} cos\, x log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 1$

हल – सत्य

(d) यदि p और q क्रमशः निम्न अवकल समीकरण की घात एवं कोटि हैं, तो $(2p - 3q)$ **होता है** (-2)**:**
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3} = 4$

हल – असत्य

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q28 - निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) अवकल समीकरण $log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + y$ का व्यापक हल क्या है?

हल – $-e^{-y} = \frac{e^{2x}}{2} + C$

(b) वक्र $ay^2 = x^3$ पर बिन्दु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल – $y - am^3 = -\frac{2}{3m}(x - am^2)$

(c) वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $Y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल – $\frac{32}{3}$

(d) $logx$ के सापेक्ष $sinx$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल – $xcos\,x$

Q29 – माना $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ दो सदिश हैं। तब -

(a) $\vec{a}.\vec{b}$ ज्ञात कीजिए ;

(b) सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् एकक सदिश ज्ञात कीजिए ;

(c) समान्तरचतुर्भुज, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ;

(d) दिए गए सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$;

(e) $|2\vec{b} \times \vec{a}|$ ज्ञात कीजिए ;

(f) दिए गए सदिशों के लिए यह जाँचिए कि क्या $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ है।

हल – (a) $\vec{a}.\vec{b} = 2$

(b) $|\vec{a} \times \vec{b}| = -\hat{k}$

(c) क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) सत्यापित हुआ।$\left[(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}||\vec{b}| - (\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2\right]$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(e) $\left|2\vec{b} \times \vec{a}\right| = 2\sqrt{2}$

(f) $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

खंड – ब

Q30 - उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y = 5$ और $2x - y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा x-अक्ष के समांतर है।

हल –

रेखाओं का प्रतिच्छेदन ज्ञात कीजिए:

$$x + y = 5$$

$$2x - y - 7 = 0$$

पहली से:

$$y = 5 - x$$

दूसरे में प्रतिस्थापित करने पर:

$$2x - (5 - x) - 7 = 0$$

$$2x - 5 + x - 7 = 0$$

$$3x - 12 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = 5 - 4 = 1$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

प्रतिच्छेदन बिंदु: $(4, 1)$

x-अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण होता है:

$$y = \text{अचर}$$

अतः अभीष्ट रेखा:

$$\boxed{y = 1}$$

अथवा

रेखाओं $2x + 3y = 4$ और $4x + 6y = 20$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल –

दी गई रेखाएँ:

$$2x + 3y - 4 = 0$$

$$4x + 6y - 20 = 0$$

पहले x और y के गुणांक समान करें।

दूसरे समीकरण को 2 से भाग देने पर:

$$2x + 3y - 10 = 0$$

अब रेखाएँ हैं:

$$2x + 3y - 4 = 0$$

$$2x + 3y - 10 = 0$$

ये समांतर रेखाएँ हैं।

समांतर रेखाओं के बीच की दूरी:

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

यहाँ,

$$c_1 = -4, \quad c_2 = -10$$

$$d = \frac{|-4-(-10)|}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{13}}$$

Q31 - उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष $(\pm 2, 0)$ तथा नाभि $(\pm 3, 0)$ हैं।

हल –

शीर्ष $(\pm 2, 0)$ हैं।

इसलिए अतिपरवलय मूल बिंदु पर केंद्रित है और इसका अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है।

मानक रूप:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

चूंकि शीर्ष $(\pm a, 0)$ हैं,

$$a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

दी गई नाभि $(3, 0)$ है, इसलिए

$$c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$$

अतिपरवलय के लिए:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$9 = 4 + b^2$$

$$b^2 = 5$$

अंतिम समीकरण

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q32 - सिद्ध कीजिए कि $(A')' = A$, जहाँ A कोटि 3×3 का एक आव्यूह है।

हल –

माना

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A का परिवर्त (Transpose) है:

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(यहाँ पंक्तियों को स्तंभों में बदल दिया गया है)

अब पुनः परिवर्त (Transpose) लेने पर:

$$(A')' = (A^T)^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(स्तंभ वापस पंक्तियों में बदल जाते हैं)

$$= A$$

अतः,

$$\boxed{(A')' = A}$$

सिद्ध हुआ।

Q33 – दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ।

हल – दिया गया है

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

पंक्ति संक्रियाएँ (Row Operations) लागू करने पर:

$$R_2 \to R_2 - R_1$$

$$R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix}$$

गुणनखंडन करने पर:

$$ca - bc = -c(b-a)$$

$$ab - bc = -b(c-a)$$

इसलिए,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & -c(b-a) \\ 0 & c-a & -b(c-a) \end{vmatrix}$$

उभयनिष्ठ गुणनखंड (Common Factors) बाहर निकालने पर:

R_2 से $(b-a)$ और R_3 से $(c-a)$ बाहर लेने पर:

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

C1 (प्रथम स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण करने पर:

$$\Delta = (b-a)(c-a)[1 \cdot (-b-(-c))]$$

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$$

अंतिम उत्तर:

$$\boxed{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Q34 – यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और A में संबंध $R = \{(2, 3)\}$ है, जाँच कीजिए कि यह संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

हल –

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

दिया है

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(2, 3)\}$$

स्वतुल्य (Reflexive)

A पर कोई संबंध स्वतुल्य है यदि

$$(1,1), (2,2), (3,3) \in R$$

चूंकि इनमें से कोई भी R में नहीं है,

$$\boxed{\text{स्वतुल्य नहीं है}}$$

सममित (Symmetric)

कोई संबंध सममित है यदि

$$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$$

लेकिन $(3,2) \notin R$.

$$\boxed{\text{सममित नहीं है}}$$

संक्रामक (Transitive)

कोई संबंध संक्रामक है यदि

$$(a,b) \in R \text{ और } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

यहाँ केवल एक युग्म $(2,3)$ है, और 3 से शुरू होने वाला कोई युग्म नहीं है।

अतः शर्त का उल्लंघन नहीं होता है।

$$\boxed{\text{संक्रामक है}}$$

Q35 – फलन $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right], x \neq 0$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल –

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

दिया है

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

चरण 1: अंश और हर को संयुग्मी (conjugate) से गुणा करने पर

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

तो व्यंजक बन जाता है

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$

चरण 2: सर्वसमिका का उपयोग करें

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

माना

$$x = \tan\theta$$

तब

$$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$$

इसलिए,

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta+1} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

इस प्रकार,

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=\frac{\theta}{2}$$

चूंकि $\theta=\tan^{-1}x$,

$$\boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}x}$$

अथवा

दर्शाइए कि फलन $f: R \to R$, जो निम्न प्रकार से परिभाषित है, न तो एकैकी है और न ही आच्छादक :

$$f(x)=\begin{cases}1, & if\ x>0\\ 0, & if\ x=0\\ -1, & if\ x<0\end{cases}$$

हल –

दिया है

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

एकैकी नहीं (Not One-One)

एक फलन के एकैकी होने के लिए,

$$f(x_1)=f(x_2)\implies x_1=x_2$$

परंतु,

$$f(1)=1,\quad f(2)=1$$

और $1\neq 2$.

अतः,

$$\boxed{f \text{ एकैकी नहीं है}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

आच्छादक नहीं (Not Onto)

f का परिसर (Range) है

$$\{-1, 0, 1\}$$

परंतु सहप्रांत (codomain) $\mathbb{R}$ है।

चूंकि मान जैसे $2, \frac{1}{2}, -3$ आदि प्राप्त नहीं होते हैं,

$$\boxed{\text{f आच्छादक नहीं है}}$$

अंतिम निष्कर्ष

$$\boxed{\text{f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है}}$$

Q36 – दर्शाइए कि $y = log(1 + x) - \frac{2x}{2+x}, (x > -1)$ अपने प्रांत में x का वर्धमान फलन है।

हल –

दिया है

$$y = \log(1 + x) - \frac{2x}{2 + x}, \quad (x > -1)$$

चरण 1: अवकलन करें

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{2 + x}\right)$$

भागफल नियम का उपयोग करने पर:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{2 + x}\right) = \frac{2(2 + x) - 2x(1)}{(2 + x)^2}$$

चरण 2: सरल करें

उभयनिष्ठ हर लेने पर:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + x)^2 - 4(1 + x)}{(1 + x)(2 + x)^2}$$

अंश का विस्तार करने पर:

$$(2+x)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 4x = x^2$$

इस प्रकार,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

चरण 3: अवकलज का चिह्न

$x > -1$ के लिए:

$$(1+x) > 0, \quad (2+x)^2 > 0$$

$$x^2 \geq 0$$

अतः,

$$\frac{dy}{dx} \geq 0$$

और $x \neq 0$ के लिए > 0 है।

अंतिम निष्कर्ष

$$\boxed{x > -1 \text{ के लिए } y \text{ एक वर्धमान फलन है}}$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4ax$ और $xy = k^2$ लंबवत् प्रतिच्छेद करते हैं, यदि $k^4 = 32a^4$।

हल –

दिए गए वक्र (Given curves)

$$y^2 = 4ax$$

$$xy = k^2$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

हमें यह दिखाना है कि वे समकोण पर काटते हैं यदि

$$k^2 = 32a^4 \quad \text{(नोट: अंतिम परिणाम } k^4 = 32a^4 \text{ है)}$$

चरण 1: पहले वक्र की प्रवणता (Slope of first curve)

$y^2 = 4ax$ का अवकलन करने पर:

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

चरण 2: दूसरे वक्र की प्रवणता (Slope of second curve)

$xy = k^2$ का अवकलन करने पर:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

चरण 3: लंबवतता की शर्त (Condition for perpendicularity)

यदि प्रवणताएँ m_1 और m_2 हैं, तो

$$m_1 m_2 = -1$$

इसलिए,

$$\frac{2a}{y}\left(-\frac{y}{x}\right) = -1$$

$$-\frac{2a}{x} = -1$$

$$x = 2a$$

चरण 4: प्रतिच्छेदन मान ज्ञात करें (Find intersection values)

परवलय से:

$$y^2 = 4a(2a)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$y^2 = 8a^2$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}a$$

चरण 5: दूसरे वक्र में उपयोग करें (Use in second curve)

$$xy = k^2$$

$$(2a)(\pm 2\sqrt{2}a) = k^2$$

$$k^2 = \pm 4\sqrt{2}a^2$$

अंतिम परिणाम (Final Result)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर:

$$(k^2)^2 = (\pm 4\sqrt{2}a^2)^2$$

$$k^4 = 16(2)a^4$$

$$\boxed{k^4 = 32a^4}$$

अतः वक्र समकोण पर काटते हैं यदि $k^4 = 32a^4$.

Q37 – यदि $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 4$ है, तो $|\vec{b} - \vec{a}|$ ज्ञात कीजिए।

हल –

दिया है

$$|a| = 2, \quad |b| = 3, \quad a \cdot b = 4$$

सूत्र का उपयोग करने पर:

$$|b - a|^2 = |b|^2 + |a|^2 - 2(a \cdot b)$$

मान रखने पर:

$$= 3^2 + 2^2 - 2(4)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$= 9 + 4 - 8$$

$$= 5$$

अतः

$$\boxed{|b - a| = \sqrt{5}}$$

अथवा

रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु (1, 2, 3) से दूरी $3\sqrt{2}$ हो।

हल –

दी गई रेखा:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$$

माना उभयनिष्ठ मान t है।

$$x = -2 + 3t$$

$$y = -1 + 2t$$

$$z = 3 + 2t$$

इसलिए रेखा पर कोई बिंदु है

$$P(-2 + 3t, -1 + 2t, 3 + 2t)$$

दिया गया बिंदु $A(1, 2, 3)$ है।

दूरी की शर्त:

$$PA = 3\sqrt{2}$$

इसलिए,

$$(-2 + 3t - 1)^2 + (-1 + 2t - 2)^2 + (3 + 2t - 3)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$(-3 + 3t)^2 + (-3 + 2t)^2 + (2t)^2 = 18$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

विस्तार करने पर:

$$9(t-1)^2 + (2t-3)^2 + 4t^2 = 18$$

$$9(t^2 - 2t + 1) + (4t^2 - 12t + 9) + 4t^2 = 18$$

$$9t^2 - 18t + 9 + 4t^2 - 12t + 9 + 4t^2 = 18$$

$$17t^2 - 30t + 18 = 18$$

$$17t^2 - 30t = 0$$

$$t(17t - 30) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{या} \quad t = \frac{30}{17}$$

बिंदु

$t = 0$ के लिए:

$$(-2, -1, 3)$$

$t = \frac{30}{17}$ के लिए:

$$\left(\frac{56}{17}, \frac{43}{17}, \frac{111}{17}\right)$$

Q38 - निम्नलिखित कथनों को 'यदि तो' के रूप में लिखिए :

(क) जब ठंड होती है, तो कभी वर्षा नहीं होती।

(ख) एक चतुर्भुज, समांतरचतुर्भुज होता है यदि इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हल –

(a)
मूल कथन:
"जब ठंड होती है तो कभी बारिश नहीं होती है।"

यदि-तो रूप:

$$\boxed{\text{यदि ठंड है, तो बारिश नहीं होती है।}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(b)

मूल कथन:

"एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है यदि इसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।"

यदि-तो रूप:

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो यह एक समांतर चतुर्भुज है

Q39 - यदि किसी दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{5}{8}$ और उसके नाभियों के बीच की दूरी 10 है, तो इस दीर्घवृत्त के नाभिलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल –

दिया है

$$e = \frac{5}{8}$$

नाभियों के बीच की दूरी:

$$2c = 10$$

$$c = 5$$

दीर्घवृत्त के लिए:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{a}$$

$$a = 8$$

अब,

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= 64 - 25$$

$$= 39$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

नाभिलंब की लंबाई:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(39)}{8} = \frac{78}{8} = \frac{39}{4}$$

Q40 - आव्यूह विधि से निम्न रैखिक समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$2x - 3y + 5z = 16$$
$$3x + 2y - 4z = -4$$
$$x + y - 2z = -3$$

हल –

चरण 1: आव्यूह रूप में लिखें

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

चरण 2: विलोपन का उपयोग करके हल करें (आव्यूह विधि के समतुल्य)

तीसरे समीकरण से:

$$x = -3 - y + 2z$$

पहले दो समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर।

(1) में:

$$2(-3 - y + 2z) - 3y + 5z = 16$$

$$-6 - 2y + 4z - 3y + 5z = 16$$

$$-6 - 5y + 9z = 16$$

$$-5y + 9z = 22$$

$$5y - 9z = -22 \quad (i)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(2) में:

$$3(-3 - y + 2z) + 2y - 4z = -4$$

$$-9 - 3y + 6z + 2y - 4z = -4$$

$$-9 - y + 2z = -4$$

$$-y + 2z = 5$$

$$y - 2z = -5 \quad (ii)$$

चरण 3: (i) और (ii) को हल करें

(ii) से:

$$y = -5 + 2z$$

(i) में प्रतिस्थापित करने पर:

$$5(-5 + 2z) - 9z = -22$$

$$-25 + 10z - 9z = -22$$

$$-25 + z = -22$$

$$z = 3$$

$$y = -5 + 2(3) = 1$$

चरण 4: x ज्ञात करें

$$x = -3 - y + 2z$$

$$= -3 - 1 + 6$$

$$= 2$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अंतिम उत्तर

$$\boxed{x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3}$$

Q41 - माना N सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और $N \times N$ पर एक संबंध R है जो $(a, b)\ R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc\ \forall (a, b), (c, d) \in N \times N$ द्वारा परिभाषित है। दर्शाइए कि R, $N \times N$ पर एक समतुल्य संबंध है।

हल –

दिया है

$$N = \text{प्राकृत संख्याओं का समुच्चय}$$

$N \times N$ पर संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$$

हम सिद्ध करते हैं कि R एक तुल्यता संबंध है।

1. स्वतुल्य

किसी भी $(a, b) \in N \times N$ के लिए,

$$ad = bc \quad \text{जब} \quad (c, d) = (a, b)$$

$$ab = ba$$

सत्य है।

अतः,

$$\boxed{R \text{ स्वतुल्य है}}$$

2. सममित

यदि

$$(a, b)R(c, d)$$

तो

$$ad = bc$$

इसका तात्पर्य है

$$bc = ad$$

इसलिए,

$$(c, d)R(a, b)$$

अतः,

$$\boxed{R \text{ सममित है}}$$

3. संक्रामक

यदि

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow ad = bc$$

और

$$(c, d)R(e, f) \Rightarrow cf = de$$

हमें सिद्ध करना है कि

$$(a, b)R(e, f)$$

गुणा करने पर:

$$ad = bc \Rightarrow adf = bcf$$

$$cf = de \Rightarrow bcf = bde$$

इस प्रकार,

$$adf = bde$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

d को निरस्त करने पर (चूंकि प्राकृत संख्याएँ शून्येतर होती हैं):

$$af = be$$

अतः,

$$(a,b)R(e,f)$$

इसलिए,

$$\boxed{R \text{ संक्रामक है}}$$

अंतिम निष्कर्ष

चूंकि R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है,

$$\boxed{R, N \times N \text{ पर एक तुल्यता संबंध है}}$$

Q42 – सिद्ध कीजिए कि $x = 0, x = 4, y = 4$ और $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को वक्र $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

हल –

दिए गए वक्र:

$$y^2 = 4x \quad \text{और} \quad x^2 = 4y$$

चरण 1: प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात करें

$y^2 = 4x$ से,

$$x = \frac{y^2}{4}$$

$x^2 = 4y$ में प्रतिस्थापित करने पर:

$$\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 4y$$

$$\frac{y^4}{16} = 4y$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$y^4 = 64y$$

$$y(y^3 - 64) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{या} \quad y = 4$$

संगत x:

$$(0,0) \quad \text{और} \quad (4,4)$$

इस प्रकार वे $x = 0, y = 0, x = 4, y = 4$ द्वारा परिबद्ध वर्ग को विभाजित करते हैं।

वर्ग का क्षेत्रफल:

$$= 4 \times 4 = 16$$

चरण 2: वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

उपयोग करने पर

$$x = 2\sqrt{y} \quad \text{और} \quad x = \frac{y^2}{4}$$

परिबद्ध क्षेत्रफल:

$$A = \int_0^4 \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \left[\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}(8) - \frac{64}{12}$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

चरण 3: शेष क्षेत्रफल

वर्ग का कुल क्षेत्रफल:

$$16$$

शेष क्षेत्रफल:

$$16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3}$$

यह क्षेत्रफल सममिति द्वारा दो समान भागों में विभाजित होता है:

$$\frac{32}{3} \div 2 = \frac{16}{3}$$

अंतिम परिणाम

प्रत्येक क्षेत्र का क्षेत्रफल है

$$\boxed{\frac{16}{3}}$$

अतः वक्र वर्ग को तीन समान क्षेत्रफलों में विभाजित करते हैं।

अथवा

$sec^2 y(1 + x^2)dy + 2x \tan y dx = 0$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $x = 1$ पर $y = \frac{\pi}{4}$ है।

हल –

दिया गया अवकल समीकरण:

$$\sec^2 y(1 + x^2)dy + 2x \tan y dx = 0$$

चरण 1: पुनर्व्यवस्थित करें

$$\sec^2 y(1 + x^2)dy = -2x \tan y dx$$

दोनों पक्षों को $(1 + x^2) \tan y$ से भाग देने पर:

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = -\frac{2x}{1 + x^2} dx$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

चरण 2: बाएँ पक्ष को सरल करें

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} = \frac{1/\cos^2 y}{\sin y/\cos y} = \frac{1}{\sin y \cos y}$$

इसलिए,

$$\frac{dy}{\sin y \cos y} = -\frac{2x}{1+x^2}dx$$

चरण 3: समाकलन करें

बायाँ पक्ष:

$$\int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{d(\tan y)}{\tan y} = \ln|\tan y|$$

दायाँ पक्ष:

$$\int -\frac{2x}{1+x^2}dx = -\ln(1+x^2)$$

चरण 4: संयोजित करें

$$\ln|\tan y| = -\ln(1+x^2) + C$$

$$\ln|\tan y| = \ln\frac{C}{1+x^2}$$

$$\tan y = \frac{C}{1+x^2}$$

चरण 5: प्रारंभिक शर्त का उपयोग करें

दिया है $y = \frac{\pi}{4}$ जब $x = 1$.

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$1 = \frac{C}{1+1}$$

$$1 = \frac{C}{2}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$C = 2$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{\tan y = \frac{2}{1+x^2}}$$

Q43 - दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C और D, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}, -\hat{\jmath} - \hat{k}$, $3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ हैं, समतलीय हैं।

हल –

स्थिति सदिश:

$$A = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$

$$B = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$C = 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$D = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

चरण 1: तीन सदिश बनाएँ

$$AB = B - A = (-3, -6, -2)$$

$$AC = C - A = (-1, 4, 3)$$

$$AD = D - A = (-8, -1, 3)$$

चरण 2: अदिश त्रिक गुणनफल की गणना करें

$$[AB \quad AC \quad AD] = \begin{vmatrix} -3 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

विस्तार करने पर:

$$= -3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$= -3(12+3) + 6(-3+24) - 2(1+32)$$

$$= -45 + 126 - 66$$

$$= 0$$

चूंकि अदिश त्रिक गुणनफल शून्य है,

$$\boxed{\text{चारों बिंदु समतलीय हैं।}}$$

अथवा

समतल $4x - 5y + 6z = 60 = 0$ के समीकरण को परिवर्तित कीजिए
(क) अन्तः खण्ड रूप में और निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों को भी ज्ञात कीजिए तथा
(ख) अभिलंब रूप में और मूलबिन्दु से समतल तक लंब की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

हल –

दिया गया समतल:

$$4x - 5y + 6z - 60 = 0$$

$$4x - 5y + 6z = 60$$

(a) अंतःखंड रूप

60 से भाग देने पर:

$$\frac{4x}{60} - \frac{5y}{60} + \frac{6z}{60} = 1$$

$$\frac{x}{15} - \frac{y}{12} + \frac{z}{10} = 1$$

इसलिए अंतःखंड रूप:

$$\boxed{\frac{x}{15} - \frac{y}{12} + \frac{z}{10} = 1}$$

अंतःखंड:

$$(15, 0, 0), \quad (0, -12, 0), \quad (0, 0, 10)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(b) अभिलंब रूप

दिया गया समतल:

$$4x - 5y + 6z - 60 = 0$$

अभिलंब सदिश का परिमाण:

$$\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

संपूर्ण समीकरण को $\sqrt{77}$ से भाग देने पर:

$$\frac{4}{\sqrt{77}}x - \frac{5}{\sqrt{77}}y + \frac{6}{\sqrt{77}}z = \frac{60}{\sqrt{77}}$$

अभिलंब रूप:

$$\boxed{\frac{4}{\sqrt{77}}x - \frac{5}{\sqrt{77}}y + \frac{6}{\sqrt{77}}z = \frac{60}{\sqrt{77}}}$$

Q44 - फलन $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ के लिए अन्तराल [0, 4] पर, लग्रांज के माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल –

दिया है

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

अंतराल $[0, 4]$ पर।

चरण 1: शर्तों की जाँच करें

$f(x)$ एक बहुपद है, अतः यह $[0, 4]$ पर सतत है और $(0, 4)$ पर अवकलनीय है।

इसलिए लैग्रेंज का मध्यमान प्रमेय लागू होता है।

चरण 2: $f(0)$ और $f(4)$ की गणना करें

$$f(0) = (-1)(-2)(-3) = -6$$

$$f(4) = (3)(2)(1) = 6$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{6-(-6)}{4}=\frac{12}{4}=3$$

चरण 3: $f'(x)$ ज्ञात करें

पहले विस्तार करें:

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

$$f'(x)=3x^2-12x+11$$

रखने पर

$$f'(c)=3$$

$$3x^2-12x+11=3$$

$$3x^2-12x+8=0$$

चरण 4: हल करें

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-96}}{6}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{48}}{6}$$

$$=\frac{12\pm4\sqrt{3}}{6}$$

$$=2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

दोनों मान $(0,4)$ में स्थित हैं।

अंतिम उत्तर

$$\boxed{c=2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

अतः लैग्रेंज का मध्यमान प्रमेय सत्यापित होता है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अथवा

फलन $f(x) = x(x-1)(x-2)$ के लिए, अन्तराल [0, 2] पर, रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल -

दिया है

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$

अंतराल $[0, 2]$ में।

चरण 1: रोले के प्रमेय की शर्तों की जाँच करें

चूँकि $f(x)$ एक बहुपद है, अतः यह $[0, 2]$ पर सतत है और $(0, 2)$ पर अवकलनीय है।

अब,

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2(1)(0) = 0$$

इस प्रकार,

$$f(0) = f(2)$$

अतः रोले के प्रमेय की सभी शर्तें संतुष्ट होती हैं।

चरण 2: $f'(x)$ ज्ञात करें

पहले विस्तार करें:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

रखने पर

$$f'(c) = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

चरण 3: हल करें

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

दोनों मान $(0, 2)$ में स्थित हैं।

अंतिम उत्तर

$$\boxed{c = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

अतः रोले का प्रमेय सत्यापित होता है।

Q45 - निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत $Z = 5x + 2y$ का न्यूनतमीकरण और अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x - 2y \le 2, \quad 3x + 2y \le 12, \quad -3x + 2y \le 3$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

हल –

उद्देश्य फलन (Objective Function)

$$Z = 5x + 2y$$

अवरोध (Constraints)

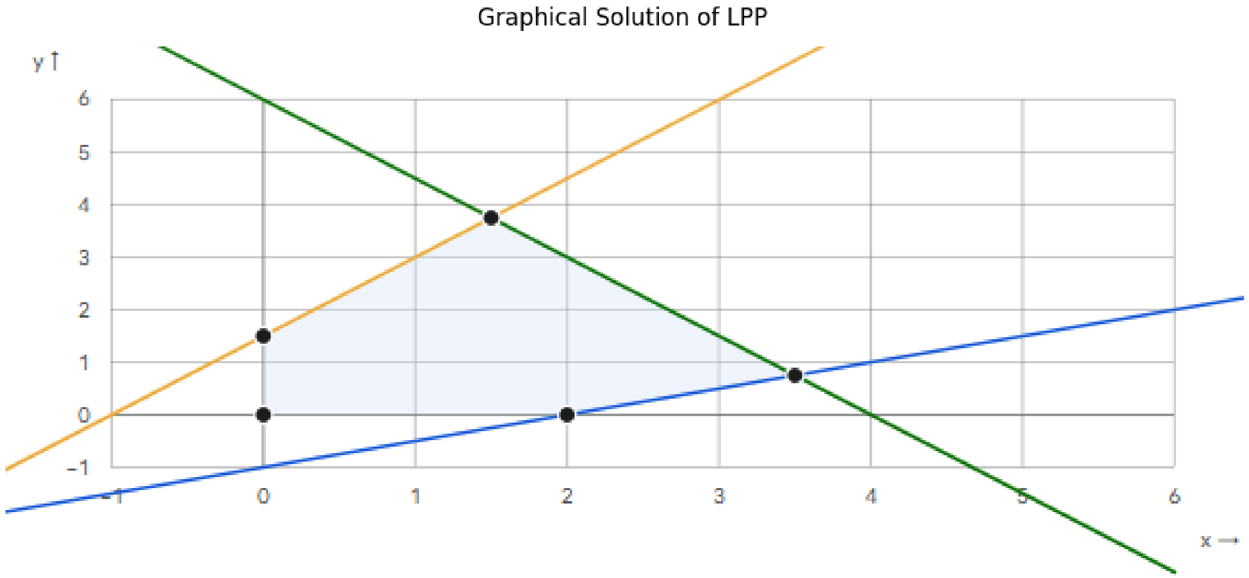
$$x - 2y \le 2$$

$$3x + 2y \le 12$$

$$-3x + 2y \le 3$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/



कोणीय बिंदु (Corner Points)

ग्राफ से प्राप्त कोणीय बिंदु निम्नलिखित हैं:

$$(0, 1.5), \quad (0, 6), \quad (2, 2), \quad (4, 0), \quad \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

Z का मूल्यांकन (Evaluate Z)

$$Z(0, 1.5) = 3$$

$$Z(0, 6) = 12$$

$$Z(2, 2) = 14$$

$$Z(4, 0) = 20$$

$$Z\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{10}{3}$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{Z_{\min} = 3 \text{ बिंदु } (0, 1.5) \text{ पर}}$$

$$\boxed{Z_{\max} = 20 \text{ बिंदु } (4, 0) \text{ पर}}$$

अतः, Z का न्यूनतम मान **3** है और अधिकतम मान **20** है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अथवा

एक किसान के पास दो तरह के रासायनिक उर्वरकों A और B की आपूर्ति है। A प्रकार के उर्वरक में 10% नाइट्रोजन और 5% फॉस्फोरिक एसिड होता है। B प्रकार के उर्वरक में 6% नाइट्रोजन और 10% फॉस्फोरिक एसिड होता है। खेत की मिट्टी की स्थिति का परीक्षण करने के बाद यह पाया गया कि अच्छी फसल पैदा करने के लिए कम-से-कम 14 कि० ग्रा० नाइट्रोजन और 14 कि० ग्रा० फॉस्फोरिक एसिड की आवश्यकता होती है। A प्रकार के उर्वरक की कीमत ₹5 प्रति कि० ग्रा० और B प्रकार के उर्वरक की कीमत ₹3 प्रति कि० ग्रा० है। न्यूनतम संभव लागत पर आवश्यकता को पूरा करने के लिए प्रत्येक प्रकार के कितने कि० ग्रा० उर्वरक का उपयोग किया जाना चाहिए? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए। प्रतिबन्धों के अंतर्गत सुसंगत क्षेत्र को भी ज्ञात कीजिए।

हल –

दिया है

मान लीजिए:

- x = उर्वरक A की मात्रा (किग्रा में)
- y = उर्वरक B की मात्रा (किग्रा में)

LPP का सूत्रीकरण

उद्देश्य फलन (लागत कम करना)

$$Z = 5x + 3y$$

अवरोध (Constraints)

नाइट्रोजन की आवश्यकता:

$$0.10x + 0.06y \geq 14$$

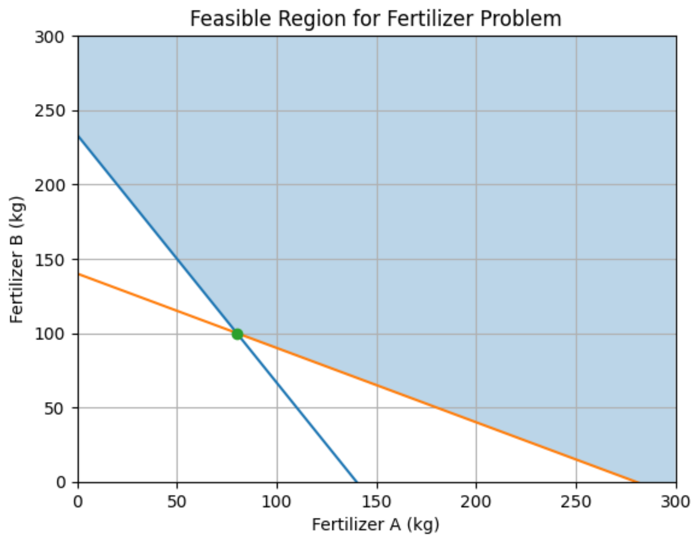
फास्फोरिक एसिड की आवश्यकता:

$$0.05x + 0.10y \geq 14$$

ऋणेतर प्रतिबंध (Non-negativity):

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/



कोणीय बिंदु (ग्राफ से)

हल करने पर:

$$0.10x + 0.06y = 14$$

$$0.05x + 0.10y = 14$$

पहले समीकरण को 5 से और दूसरे को 10 से गुणा करने पर:

$$0.50x + 0.30y = 70$$

$$0.50x + 1.00y = 140$$

घटाने पर:

$$0.70y = 70$$

$$y = 100$$

मान रखने पर:

$$x = 80$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

न्यूनतम लागत

$$Z = 5(80) + 3(100)$$

$$= 400 + 300$$

$$= 700$$

अंतिम निष्कर्ष

$$\boxed{80 \text{ किग्रा A और } 100 \text{ किग्रा B}}$$

$$\boxed{\text{न्यूनतम लागत} = ₹700}$$

सुसंगत क्षेत्र (feasible region) अपरिबद्ध (unbounded) है, लेकिन न्यूनतम लागत दोनों पोषक तत्वों की रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु पर प्राप्त होती है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

NIOS PYQ's SOLUTIONS

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS & ANSWERS

OCTOBER-2025

Your Path to Success

खंड - क

Q1 - वह अनुपात जिसमें बिंदु P जिसकी कोटि -3 है, $A(6,5)$ और $B(-1,4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करता है, है

(A) 7:8 बाह्य

(B) 7:8 अंतः

(C) 8:7 बाह्य

(D) 8:7 अंतः

हल - (C) 8:7 बाह्य

Q2 – रेखाओं $3x + 4y = 5$ और $3x + 4y + 5 = 0$ के बीच की दूरी है

(A) 10 इकाई

(B) 2 इकाई

(C) 1 इकाई

(D) 4 इकाई

हल – (B) 2 इकाई

Q3 – यदि $(3,4)$ वृत्त $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ के व्यास का एक सिरा है, तो दूसरे सिरे के निर्देशांक हैं

(A) $(5,0)$

(B) $(0,5)$

(C) $(-5,0)$

(D) $(0,-5)$

हल - (C) $(-5,0)$

Q4 – अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ की नाभियाँ हैं

(A) $(\pm 7,0)$

(B) $(0,\pm 7)$

(C) $(0,\pm 5)$

(D) $(\pm 5,0)$

हल - (D) $(\pm 5,0)$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q5 – यदि दीर्घवृत्त के दीर्घ-अक्ष की लंबाई, उसके लघु-अक्ष की लंबाई की 3 गुना है, तो दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता है

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(B) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

हल - (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Q6 – यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह हैं, तो

(A) केवल AB का अस्तित्व है

(B) केवल BA का अस्तित्व है

(C) AB और BA दोनों का अस्तित्व नहीं है

(D) AB और BA दोनों का अस्तित्व है

हल - (D) AB और BA दोनों का अस्तित्व है

Q7 – माना Z समस्त पूर्णांकों का समुच्चय है और R, Z में इस प्रकार परिभाषित संबंध है कि xRy यदि $|x - y| \leq 2$. तब, R है

(A) स्वतुल्य और संक्रामक संबंध

(B) स्वतुल्य और सममित संबंध

(C) सममित और संक्रामक संबंध

(D) तुल्यता संबंध

हल - (B) स्वतुल्य और सममित संबंध

Q8 – यदि $f: R \to R$ और $g: R \to R$ इस प्रकार परिभाषित हैं कि $f(x) = 8x^3$ और $g(x) = \sqrt[3]{x}$, तो $(f \circ g)(x)$ है

(A) $8x$

(B) $2x$

(C) $2\sqrt[3]{x}$

(D) $8\sqrt[3]{x}$

हल - (A) $8x$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q9 - यदि A और B दो आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = O$, तो

(A) यह आवश्यक नहीं है कि $A = O$ या $B = O$

(B) $A = O$ या $B = O$

(C) $A = O$ और $B = O$

(D) उपर्युक्त सभी गलत हैं

हल - (A) यह आवश्यक नहीं है कि $A = O$ या $B = O$

Q10 – माना $A = \begin{bmatrix} 1 & w^2 & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ w, 1 का घनमूल है। तब सारणिक (A) बराबर है

(A) $-w$

(B) $-w^2$

(C) -1

(D) $-3w$

हल - (D) $-3w$

Q11 – $Q(2,1,2)$ और $R(5,2,5)$ को मिलाने पर प्राप्त रेखा खंड पर बिन्दु P स्थित है। यदि P का $x-$ निर्देशांक 4 है, तो P का 2-निर्देशांक है:

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) 4

हल - (D) 4

Q12 - कथन "यदि आप भारत में पैदा हुए हैं, तो आप भारत के नागरिक हैं" का प्रतिधनात्मक है :

(A) यदि आप भारत के नागरिक हैं, तो आप भारत में पैदा हुए हैं।

(B) यदि आप भारत के नागरिक नहीं हैं, तो आप भारत में पैदा नहीं हुए हैं।

(C) आप भारत के पैदा हुए हैं यदि और केवल यदि आप भारत के नागरिक हैं।

(D) आप भारत में पैदा हुए हैं या (अथवा) आप भारत के नागरिक हैं।

हल - (B) यदि आप भारत के नागरिक नहीं हैं, तो आप भारत में पैदा नहीं हुए हैं।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q13 – फलन $f(x) = cos^{-1}(x^2 - 4)$ का प्रांत है

(A) $[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}]$

(B) $[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

(C) $[-\sqrt{5}, \sqrt{3}]$

(D) $[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

हल - (D) $[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

Q14 - $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{6}\right)$ का मान है

(A) $-\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{5\pi}{6}$

(D) $-\frac{5\pi}{6}$

हल – (A) $-\frac{\pi}{6}$

Q15 - यदि $y = \frac{1}{a}cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\frac{1}{x^2+a^2}$

(B) $\frac{1}{a^2-x^2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(D) $\frac{-1}{x^2+a^2}$

हल - (D) $\frac{-1}{x^2+a^2}$

Q16 - वह अंतराल जिसमें फलन $f(x) = 2x^2 - 4x + 15$ वर्धमान है, है

(A) $(-1, \infty)$

(B) $(1, \infty)$

(C) $(0, 1)$

(D) $(1, 4)$

हल – (B) $(1, \infty)$

Q17 – यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 12$, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ है

(A) 5

(B) 10

(C) 14

(D) 16

हल - (D) 16

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q18 – समतल $x + 2y + z = 0$ और $2x - y + z = 15$ के बीच का कोण है

(A) $tan^{-1}\frac{1}{6}$

(B) $sin^{-1}\frac{1}{6}$

(C) $cos^{-1}\frac{1}{6}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

हल - (C) $cos^{-1}\frac{1}{6}$

Q19 – बिंदु $(2, -1, 4)$ से गुजरने वाली रेखा, और सदिश $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ के समांतर है, का सदिश समीकरण है:

(A) $\vec{r} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} + \lambda(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k})$

(B) $\vec{r} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

(C) $\vec{r} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

(D) $\vec{r} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$

हल - (D) $\vec{r} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$

Q20 – यदि $\vec{a} + \vec{b} = \hat{\imath}$ और $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, तो $|\vec{b}|$ बराबर है

(A) $\frac{1}{3}$

(B) 3

(C) 1

(D) -3

हल - (B) 3

Q21 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की उत्केन्द्रता है ______ ।

(ii) दीर्घवृत्त $5x^2 + 6y^2 = 3$ की दीर्घ-अक्ष की लंबाई ____ है।

हल – (a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q22 - कॉलम I के कथनों को कॉलम II के सही विकल्प से मिलाएँ :

कॉलम I	कॉलम II
(i) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{3}+sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)$	(a) $\frac{\pi}{3}$
(ii) $cos^{-1}\left(-sin\frac{7\pi}{6}\right)$	(b) $\frac{2\pi}{3}$

हल –

(i) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{3}+sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right) \longrightarrow$ (a) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $cos^{-1}\left(-sin\frac{7\pi}{6}\right) \longrightarrow$ (a) $\frac{\pi}{3}$

Q23 - सहा कथन के लिए सत्य आर गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

(i) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e+f & g+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}$

(b) यदि A और B दो वर्ग व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तो $Adj\ A\ =\ Adj$ B का तात्पर्य $A = B$ है।

हल –

(a) असत्य

(b) असत्य

Q24 - निम्न कथनों में से प्रत्येक का प्रतिधनात्मक लिखिए :

(a) यदि $ABCD$ एक वर्ग है, तो यह एक समचर्तुभुज है।

(b) यदि a और b परिमेय संख्याएँ हैं, तो ab एक वास्तविक संख्या है।

हल –

(a) यदि ABCD समचतुर्भुज नहीं है, तो यह वर्ग नहीं है।

(b) यदि ab वास्तविक संख्या नहीं है, तो a और b परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q25 – A और B कोटि 2×2 के दो आव्यूह हैं जिनमें उनके अवयव क्रमशः $a_{ij} = i + j$ और $b_{ij} = i - j$ हैं।

कॉलम 1 के कथनों को कॉलम II के सही विकल्प से मिलाएँ :

कॉलम I	**कॉलम II**
(i) $A + 2B$	**(a)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
(ii) AB	**(b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
(iii) A'	**(c)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
(iv) B^{-1}	**(d)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

हल –

(i) $A + 2B \longrightarrow$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(ii) $AB \longrightarrow$ (a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(iii) $A' \longrightarrow$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(iv) $B^{-1} \longrightarrow$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Q26 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सदिश $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ के लम्बवत् और बिन्दु (1, 4, 6) से गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण है ________।

हल – $r \cdot (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}) = -1$

(ii) समतल $2x + 3y + 4z = 24$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों का योग है ______ ।

हल – 26

(iii) तीन बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ हैं, से गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण है ______ ।

हल – $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(iv) बिंदु $(-1, 2, -3)$ से समतल $2x - y + 2z = 13$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई है ______ ।

हल – 23/3 इकाई

Q27 - सही कथन के लिए सत्य और गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

(i) वक्र $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 21$ के बिन्दु $(1, 2)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा, x-अक्ष के समांतर है।

हल – असत्य

(ii) $\int x\cos x dx$ बराबर है $x\cos x + \sin x + c$ के।

हल – असत्य

(iii) $\int e^x \left(2\log x + \frac{2}{x}\right) dx$ बराबर है $e^x \log x^2 + c$ के।

हल – सत्य

(iv) परवलय के शीर्ष पर खींचा गया लम्ब, परवलय की नाभि से होकर गुजरता है।

हल – सत्य

Q28 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = x$ की घात है _______।

हल – 1

(ii) अवकल समीकरण, जिसका हल $y = a\cos x + b\sin x$ (a, b स्वैच्छिक अचर है) है ______।

हल – $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(iii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का हल है, $e^y =$______।

हल – $e^y = \frac{1}{C - e^x}$

(iv) वक्र $y = x^3$ तथा $x = 0, x = 1, y = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है _____।

हल – 1/4 वर्ग इकाई

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q29 - वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में एक कंपनी का कुल लागत फलन $C = \frac{1}{3}x^3 = 18x^2 + 160x$ है। औसत लागत (AC) प्रत्येक इकाई की उत्पादन लागत और सीमांत लागत (MC) उत्पादन के किसी स्तर पर x इकाई के सापेक्ष संपूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है। x पर C न्यूनतम है जब इसका प्रथम अवकलज पर शून्य और द्वितीय अवकलज धनात्मक है। इसी प्रकार, x पर C अधिकतम है जब इसका प्रथम अवकलज x पर शून्य और द्वितीय अवकलज ऋणात्मक है।

उपरोक्त सूचना के आधार पर,निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) औसतन लागत (AC) दी गई है :

(A) $\frac{1}{3}x^2 - 18x + 160$

(B) $x^2 - 36x + 160$

(C) $\frac{1}{3}x^3 - 18x + 160$

(D) $\frac{1}{3}x^4 - 18x^2 + 160$

हल – (A) $\frac{1}{3}x^2 - 18x + 160$

(ii) सीमांत लागत (MC) दी गई है :

(A) $3x^2 - 36x + 160$

(B) $x^2 - 36x + 160$

(B) $x^2 - 16x + 160$

(D) $x^2 + 36x + 160$

हल – (B) $x^2 - 36x + 160$

(iii) उत्पादन जिस पर औसतन लागत, सीमांत लागत के बराबर है, हैं :

(A) 27 इकाइयाँ

(B) 18 इकाइयाँ

(C) 9 इकाइयाँ

(D) 36 इकाइयाँ

हल – (A) 27 इकाइयाँ

(iv) उत्पादन जिस पर सीमान्त लागत न्यूनतम है, हैं :

(A) 27 इकाइयाँ

(B) 18 इकाइयाँ

(C) 16 इकाइयाँ

(D) 12 इकाइयाँ

हल – (B) 18 इकाइयाँ

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(v) उत्पादन जिस पर औसतन लागत न्यूनतम है, हैं :

(A) 27 इकाइयाँ

(B) 18 इकाइयाँ

(C) 9 इकाइयाँ

(D) 12 इकाइयाँ

हल – (A) 27 इकाइयाँ

(vi) सीमान्त लागत न्यूनतम है :

(A) 164

(B) -164

(C) 216

(D) -216

हल – (B) -164

खंड - ख

Q30 - त्रिभुज जिसके शीर्ष $(1,2),(2,3)$ तथा $(-3,4)$ है, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल – दिए गए त्रिभुज के शीर्ष हैं:

$$A(1,2),\ B(-2,3),\ C(-3,-4)$$

त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र प्रयोग करते हैं:

$$\text{त्रिभुज } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \mid 1[(3-(-4)) - 2((-2)-(-3)) + 1((-2)(-4) - 3(-3))] \mid$$

$$= \frac{1}{2}[(7) - 2(1) + (8+9)]$$

$$= \frac{1}{2}(7 - 2 + 17) = \frac{1}{2}(22) = 11$$

$$\boxed{\therefore \text{ त्रिभुज का क्षेत्रफल } = 11 \text{ वर्ग इकाई}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q31 - वृत्त जो y – अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है और जिसकी त्रिज्या 3 इकाई है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल – चूँकि वृत्त **मूल बिन्दु पर y-अक्ष को स्पर्श करता है**, इसलिए स्पर्श बिन्दु (0,0)है।

चूँकि वृत्त **मूल बिन्दु पर y-अक्ष को स्पर्श करता है**, इसलिए उसका केन्द्र **x-अक्ष पर** होगा (क्योंकि केन्द्र से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब स्पर्श बिन्दु से होकर गुजरता है।)

माना केन्द्र $(a, 0)$ है।

चूँकि त्रिज्या = 3इकाई है,

$$|a| = 3$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ अथवा } a = -3$$

अतः दो सम्भावित वृत्त होंगे।

वृत्त का समीकरण:

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

स्थिति 1: केन्द्र $(3, 0)$, त्रिज्या $= 3$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 6x = 0}$$

स्थिति 2: केन्द्र $(-3, 0)$, त्रिज्या $= 3$

$$(x+3)^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 9$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x = 0}$$

अतः अभीष्ट वृत्तों के समीकरण हैं:

$$x^2 + y^2 - 6x = 0 \text{ or } x^2 + y^2 + 6x = 0$$

अथवा

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 1$ की उत्केन्द्रता और नाभि के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल – दिया गया दीर्घवृत्त है,

$$4x^2 + 9y^2 = 1$$

इसे मानक रूप में लिखते हैं:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

मानक समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

से तुलना करने पर,

$$a^2 = \frac{1}{4}, b^2 = \frac{1}{9}$$

चूँकि $a^2 > b^2$, अतः महाअक्ष **x-अक्ष** के अनुदिश है।

दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता,

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

अब,

$$a = \frac{1}{2}$$

तथा

$$c = ae = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

अतः नाभियों के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right) \text{ और } \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$\text{उत्केन्द्रता } = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभियाँ } = \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

Q32 - x – अक्ष का वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $A(2, 0, 0)$ और $B(0, 3, 0)$ से समान दूरी पर है।

हल – माना x-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु $P(x, 0,0)$ है।

चूँकि P, बिन्दुओं Aतथा Bसे समान दूरी पर है, इसलिए

$$PA = PB$$

त्रिविमीय दूरी सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = | x - 2 |$$

और

$$PB = \sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$

अतः,

$$|x - 2| = \sqrt{x^2 + 9}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(x-2)^2 = x^2 + 9$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 9$$

$$-4x = 5$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु है,

$$\left(-\frac{5}{4}, 0, 0\right)$$

$\therefore$ x-अक्ष पर $A(2,0,0)$ तथा $B(0,3,0)$ से समान दूरी पर स्थित बिन्दु $\left(-\frac{5}{4}, 0,0\right)$ है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अथवा

बिन्दु (1, 2, 1) से गुजरने वाले और $x -$ अक्ष के लम्बवत्, समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल – दिया है,

- समतल जिस बिन्दु से होकर गुजरता है: (1, 2, 1)
- समतल **x-अक्ष पर लम्बवत्** है।

जो समतल x-अक्ष पर लम्बवत् होता है, उसका **अभिलम्ब (Normal)** x-अक्ष के समानान्तर होता है। अतः ऐसे समतल का समीकरण

$$x = a$$

के रूप में होगा।

चूँकि समतल बिन्दु (1, 2, 1)से होकर गुजरता है,

$$a = 1$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण है,

$$\boxed{x = 1}$$

$\therefore$ अभीष्ट समतल का समीकरण $x = 1$ है।

Q33 – यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ और $\vec{b} = -6\hat{\imath} + m\hat{\jmath}$ संरेख हैं, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल – दिया है,

$$\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}, \vec{b} = -6\hat{\imath} + m\hat{\jmath}$$

चूँकि दोनों सदिश **संरेख (Collinear)** हैं, इसलिए उनके संगत अवयव समानुपाती होंगे।

$$\frac{2}{-6} = \frac{-3}{m}$$

क्रॉस-गुणा करने पर,

$$2m = (-6)(-3)$$

$$2m = 18$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$m = 9$$

$$\boxed{\therefore \ m = 9}$$

Q34 – यदि $A = \begin{bmatrix} \sin x & 1 & 1 \\ 1 & e^x & 1 \\ \cos x & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो दर्शाइए कि $|4A| = 64|A|$।

हल – दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & 1 & 1 \\ 1 & e^x & 1 \\ \cos x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह के प्रत्येक अवयव को 4से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$4A = \begin{bmatrix} 4\sin x & 4 & 4 \\ 4 & 4e^x & 4 \\ 4\cos x & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

यदि 3×3कोटि के किसी आव्यूह के प्रत्येक अवयव को किसी नियतांक kसे गुणा किया जाए, तो उसका सारणिक k^3से गुणा हो जाता है।

अतः,

$$|kA| = k^3|A|$$

$k = 4$रखने पर,

$$|4A| = 4^3|A| = 64|A|$$

$$\boxed{|4A| = 64|A|}$$

अतः सिद्ध हुआ।

Q35 – x और y के किन मानों के लिए, निम्न आव्यूह बराबर हैं?

$$A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 3y \\ 0 & y^2 - 5y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x+3 & y^2+2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

हल – चूँकि आव्यूह Aतथा Bसमान हैं, इसलिए उनके संगत अवयव भी समान होंगे।

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(i)

$$2x + 1 = x + 3$$

$$2x - x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

(ii)

$$3y = y^2 + 2$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y - 1)(y - 2) = 0$$

$$\therefore\ y = 1 \text{ अथवा } y = 2$$

(iii)

$$y^2 - 5y = -6$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$(y - 2)(y - 3) = 0$$

$$\therefore\ y = 2 \text{ अथवा } y = 3$$

दोनों शर्तों को संतुष्ट करने वाला समान मान है,

$$\boxed{y = 2}$$

अतः,

$$\boxed{x = 2,\ y = 2}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{अभीष्ट मान } x = 2 \text{ तथा } y = 2 \text{ हैं।}}$$

Q36 – $\cos(\tan^{-1} x + \cot^{-1} \sqrt{3}) = 0$. को x के लिए हल कीजिए।

हल – दिया है,

$$\cos(\tan^{-1} x + \cot^{-1} \sqrt{3}) = 0$$

चूँकि,

$$\cot^{-1}\sqrt{3} = 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

अतः समीकरण होगा,

$$\cos\left(\tan^{-1}x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

अब,

$$\cos\theta = 0$$

जब

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

अतः,

$$\tan^{-1}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

दोनों पक्षों का स्पर्शज्या (tangent) लेने पर,

$$x = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$$\boxed{\therefore\ x = \sqrt{3}}$$

Q37 – यदि $y = e^x \log(1 + x^2)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल - दिया है,

$$y = e^x \log(1 + x^2)$$

गुणन नियम (Product Rule) का प्रयोग करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) \cdot \log(1 + x^2) + e^x \cdot \frac{d}{dx}[\log(1 + x^2)].$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

तथा,

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$\frac{d}{dx}[\log(1+x^2)] = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

अतः,

$$\frac{dy}{dx} = e^x\log(1+x^2) + e^x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

e^x को सार्व गुणनखण्ड लेने पर,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^x\left(\log(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2}\right).}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{dy}{dx} = e^x\left(\log(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2}\right).}$$

अथवा

ज्ञात कीजिए : $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\tan^2 x}$

हल – दिया है,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\tan^2 x}$$

सर्वसमिका का प्रयोग करने पर,

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

हमें प्राप्त होता है,

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)\cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

अब,

$$\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x),$$

का प्रयोग करने पर,

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2 x}{1-\cos x}.$$

अब $x = \pi$ रखने पर,

$$\cos\pi = -1.$$

अतः,

$$= \frac{(-1)^2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}}$$

Q38 - फलन f(x), अंतराल [a, b] में, के लिए रोले प्रमेय लिखिए।

हल – रोल का प्रमेय :

यदि कोई फलन $f(x)$:

- बंद अंतराल $[a, b]$ पर **सतत (Continuous)** हो,
- खुले अंतराल (a, b) पर **अवकलनीय (Differentiable)** हो, तथा
- $f(a) = f(b)$ को संतुष्ट करता हो,

तो अंतराल (a, b) में कम-से-कम एक बिन्दु c अवश्य होगा, जिसके लिए

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists\, c \in (a, b): f'(c) = 0$$

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

अर्थात्, a तथा b के बीच कम-से-कम एक ऐसा बिन्दु होता है, जहाँ वक्र पर खींची गई स्पर्शरेखा **x-अक्ष के समानांतर** होती है।

अथवा

वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$ ह्रासमान है।

हल – दिया है,

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

xके सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 20$$

$$= 2(3x^2 + x - 10)$$

$$= 2(3x - 5)(x + 2)$$

फलन के **ह्रासमान (Decreasing)** होने के लिए,

$$f'(x) < 0$$

होना चाहिए।

चूँकि $2 > 0$,

$$(3x - 5)(x + 2) < 0$$

क्रांतिक बिन्दु (Critical Points) हैं,

$$x = -2, x = \frac{5}{3}.$$

अब $f'(x)$के चिन्ह की जाँच करने पर,

- $x < -2$के लिए, $f'(x) > 0$
- $-2 < x < \frac{5}{3}$ के लिए, $f'(x) < 0$
- $x > \frac{5}{3}$ के लिए, $f'(x) > 0$

अतः फलन निम्न अंतराल में ह्रासमान है,

$$\boxed{\left(-2, \frac{5}{3}\right)}$$

∴ फलन $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$ अंतराल $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$ में ह्रासमान है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q39 - आव्यूह विधि से निम्न रैखिक समीकरण निकाय को x, y और z के मानों को ज्ञात करने के लिए, हल कीजिए:

$\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$

$\mathbf{2x + 3y + 2z = -2}$

$\mathbf{3x - 3y + 4z = 13}$

हल – दिया गया समीकरणों का निकाय (System of Equations) आव्यूह रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$AX = B,$$

जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

चूँकि,

$$X = A^{-1}B,$$

इसलिए पहले Aका सारणिक (Determinant) ज्ञात करते हैं।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(12 + 6) - 2(8 - 6) + 3(-6 - 9)$$

$$= 18 - 4 - 45 = -31.$$

चूँकि,

$$|A| = -31 \neq 0,$$

अतः Aका प्रतिलोम (Inverse) विद्यमान है।

Aका सह-आव्यूह (Adjoint) है,

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 18 & -17 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अतः,

$$A^{-1} = \frac{1}{-31}\begin{bmatrix} 18 & -17 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

अब,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-31}\begin{bmatrix} 18 & -17 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

गुणा करने पर,

$$= \frac{1}{-31}\begin{bmatrix} -31 \\ 62 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

अतः,

$$\boxed{x = 1,\ y = -2,\ z = 1}$$

सत्यापन (Verification) :

$$1 + 2(-2) + 3(1) = 0,$$

$$2(1) + 3(-2) + 2(1) = -2,$$

$$3(1) - 3(-2) + 4(1) = 13.$$

अतः हल सत्यापित है।

$$\boxed{\therefore\ x = 1,\ y = -2,\ z = 1.}$$

Q40 - रेखाओं $5x - 3y = 1$ और $2x + 3y = 23$ के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर जाने और रेखा $5x + 3y = 1$ के लंबवत् रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल – अभीष्ट रेखा, रेखाओं

$$5x - 3y = 1$$

तथा

$$2x + 3y = 23$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरती है।

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$5x - 3y + 2x + 3y = 1 + 23$$

$$7x = 24$$

$$x = \frac{24}{7}.$$

अब $2x + 3y = 23$में मान रखने पर,

$$2\left(\frac{24}{7}\right) + 3y = 23$$

$$\frac{48}{7} + 3y = 23$$

$$3y = \frac{161 - 48}{7} = \frac{113}{7}$$

$$y = \frac{113}{21}.$$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु है,

$$\left(\frac{24}{7}, \frac{113}{21}\right).$$

अब, रेखा

$$5x + 3y = 1$$

को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}.$$

अतः इसकी ढाल है,

$$m_1 = -\frac{5}{3}.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

इस पर लम्बवत् रेखा की ढाल होगी,

$$m_2 = \frac{3}{5}.$$

बिन्दु-ढाल (Point-Slope) रूप का प्रयोग करने पर,

$$y - \frac{113}{21} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{24}{7}\right).$$

पूरे समीकरण में 105 से गुणा करने पर,

$$105y - 565 = 63x - 216.$$

अतः,

$$63x - 105y + 349 = 0.$$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा का समीकरण है $63x - 105y + 349 = 0.$

अथवा

बिन्दुओं $(1, 0), (0, 6)$ और $(3, 4)$ से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल – माना वृत्त का समीकरण है,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

चूँकि वृत्त (1, 0)से होकर जाता है,

$$1 + 2g + c = 0$$

$$\boxed{2g + c = -1} \cdots (1)$$

चूँकि यह $(0, -6)$से होकर जाता है,

$$36 - 12f + c = 0$$

$$\boxed{c = 12f - 36} \cdots (2)$$

चूँकि यह (3, 4)से होकर जाता है,

$$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$$

$$\boxed{25 + 6g + 8f + c = 0} \cdots (3)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

समीकरण (1) से,

$$c = -1 - 2g.$$

इसे समीकरण (3) में रखने पर,

$$25 + 6g + 8f - 1 - 2g = 0$$

$$24 + 4g + 8f = 0$$

$$\boxed{g + 2f = -6} \cdots (4)$$

साथ ही, समीकरण (1) तथा (2) से,

$$-1 - 2g = 12f - 36$$

$$35 - 2g = 12f.$$

अब समीकरण (4) से f का मान रखने पर,

$$g + \frac{35 - 2g}{6} = -6$$

$$6g + 35 - 2g = -36$$

$$4g = -71$$

$$g = -\frac{71}{4}.$$

अतः,

$$f = \frac{35 - 2g}{12} = \frac{35 + \frac{71}{2}}{12} = \frac{47}{8}.$$

तथा,

$$c = -1 - 2g = -1 + \frac{71}{2} = \frac{69}{2}.$$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण है,

$$x^2 + y^2 - \frac{71}{2}x + \frac{47}{4}y + \frac{69}{2} = 0.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

पूरे समीकरण में 4से गुणा करने पर,

$$\boxed{4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0.}$$

$$\boxed{\therefore \text{ अभीष्ट वृत्त का समीकरण है } 4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0.}$$

Q41 - दर्शाइए कि फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ जो $f(x) = x^2 - 1$ द्वारा परिभाषित है न तो एकैकी फलन और न ही आच्छादक फलन है।

हल – दिया है,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1.$$

(i) यह सिद्ध करने के लिए कि fएक-एक (One-One) नहीं है

दो भिन्न वास्तविक संख्याएँ लें,

$$x = 1 \text{तथा} x = -1.$$

तब,

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

तथा,

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

अतः,

$$f(1) = f(-1),$$

जबकि

$$1 \neq -1.$$

अर्थात्, प्रांत (Domain) के दो भिन्न अवयवों का प्रतिबिम्ब (Image) समान है।

$$\boxed{\therefore\ f \text{ एक-एक (One-One) नहीं है।}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

(ii) यह सिद्ध करने के लिए कि f आच्छादक (Onto) नहीं है

प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए,

$$x^2 \geq 0.$$

अतः,

$$f(x) = x^2 - 1 \geq -1.$$

इसलिए, -1 से छोटी कोई भी वास्तविक संख्या $\mathbb{R}$ के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हो सकती।

उदाहरण के लिए,

$$-2 \in \mathbb{R},$$

परन्तु कोई भी वास्तविक संख्या x ऐसी नहीं है कि

$$x^2 - 1 = -2.$$

इससे,

$$x^2 = -1,$$

जो कि किसी भी वास्तविक x के लिए सम्भव नहीं है।

अतः, -2 का कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब (Pre-image) नहीं है।

$\therefore$ f आच्छादक (Onto) नहीं है।

अतः,

$\therefore$ $f(x) = x^2 - 1$ न तो एक-एक (One-One) है और न ही आच्छादक (Onto) है।

Q42 – माना फलन $f(x)$ जो निम्न रूप में परिभाषित है, $x = 0$ पर सतत् है।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 + \sqrt{x}} - 4}, & x > 0 \end{cases}$$

a का मान ज्ञात कीजिए।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

हल – पर सततता (Continuity) के लिए,

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = a.$$

बायाँ सीमा मान (Left-hand Limit)

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$$

मानक सीमा का प्रयोग करने पर,

$$\lim_{\theta\to0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2},$$

हमें प्राप्त होता है,

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 4x}{(4x)^2} \times 16$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 = 8.$$

दायाँ सीमा मान (Right-hand Limit)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}$$

हर (Denominator) का परिमेयकरण (Rationalisation) करने पर,

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4\right)}{(16+\sqrt{x})-16}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4\right)$$

$$= 4 + 4 = 8.$$

चूँकि,

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 8,$$

अतः सततता के लिए,

$$\boxed{\therefore\ a = 8.}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अथवा

वक्र $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 21$ के वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर वक्र पर डाले गई स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समांतर हैं। इन बिन्दुओं पर डाले गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल – दिया है,

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 21.$$

xके सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36.$$

$$= 6(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 6(x - 2)(x - 3).$$

जब स्पशरिखा x-अक्ष के समानांतर होती है, तब

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

अतः,

$$6(x - 2)(x - 3) = 0.$$

इसलिए,

$$x = 2 \text{ अथवा } x = 3.$$

अब yके संगत मान ज्ञात करते हैं।

जब $x = 2$**,**

$$y = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) - 21$$

$$= 16 - 60 + 72 - 21 = 7.$$

अतः एक बिन्दु है, (2,7).

जब $x = 3$**,**

$$y = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) - 21$$

$$= 54 - 135 + 108 - 21 = 6.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अतः दूसरा बिन्दु है, (3,6).

इस प्रकार, स्पर्शरेखाएँ निम्न बिन्दुओं पर x-अक्ष के समानांतर हैं,

$$\boxed{(2,7) \text{ तथा } (3,6).}$$

चूँकि प्रत्येक स्पर्शरेखा की ढाल शून्य है, इसलिए उनके समीकरण हैं,

$$\boxed{y = 7}$$

तथा

$$\boxed{y = 6.}$$

∴ स्पर्शरेखाएँ (2,7) तथा (3,6) पर x-अक्ष के समानांतर हैं तथा उनके समीकरण $y = 7$ और $y = 6$ हैं।

Q43 – रेखाओं $x - 2y + z = 0 = x + 2y - 2z$ और $\frac{x-1}{3} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{0}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल – पहली रेखा निम्न समतलों के प्रतिच्छेद की रेखा है,

$$x - 2y + z = 0$$

तथा

$$x + 2y - 2z = 0.$$

इन समतलों के अभिलम्ब सदिश (Normal Vectors) हैं,

$$\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 1), \overrightarrow{n_2} = (1, 2, -2).$$

रेखा का दिशा सदिश (Direction Vector) होगा,

$$\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}.$$

$$\overrightarrow{d_1} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4 - 2)\hat{\imath} - (-2 - 1)\hat{\jmath} + (2 + 2)\hat{k}$$

$$= 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अतः पहली रेखा के दिशा अनुपात (Direction Ratios) हैं,

$$(2,3,4).$$

दूसरी रेखा है,

$$\frac{x-1}{3}=\frac{1-y}{1}=\frac{z}{0}.$$

चूँकि,

$$\frac{1-y}{1}=\frac{y-1}{-1},$$

अतः इसके दिशा अनुपात हैं,

$$(3,-1,0).$$

माना θदोनों रेखाओं के बीच का कोण है।

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

मान रखने पर,

$$\cos\theta=\frac{2(3)+3(-1)+4(0)}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\,\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}}$$

$$=\frac{6-3}{\sqrt{29}\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{290}}.$$

अतः,

$$\boxed{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{290}}\right).}$$

अतः,

∴ दी गई रेखाओं के बीच का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{290}}\right)$ है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q44 - निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या (LPP) को आलेख विधि से हल कीजिए:

राशि Z का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए : $Z = 3x + 4y$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$2x + y \le 1000$

$x + y \le 800$

$x \le 400$

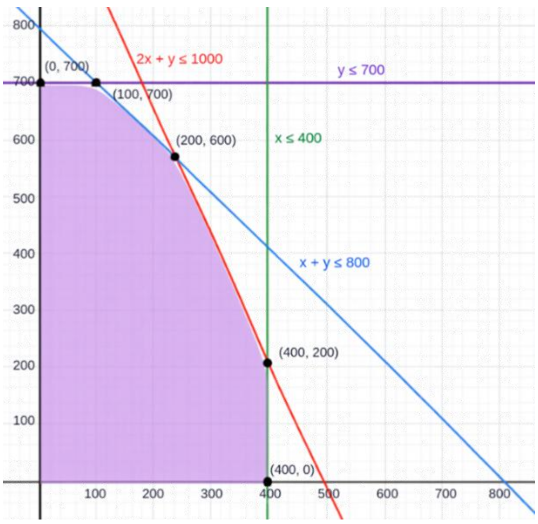
$y \le 700$

$x \ge 0,\ y \ge 0$

हल – दिए गए प्रतिबन्ध हैं,

$$2x + y \le 1000, x + y \le 800, x \le 400, y \le 700,$$

$$x \ge 0, y \ge 0.$$



साध्य क्षेत्र (Feasible Region) के कोने (Corner Points) इस प्रकार प्राप्त होते हैं :

कोना	निर्देशांक	गणना
O	(0,0)	मूल बिन्दु
A	(400,0)	$x = 400,\ y = 0$
B	(400,200)	$x = 400,\ 2x + y = 1000$
C	(200,600)	$2x + y = 1000$तथा $x + y = 800$को हल करने पर
D	(100,700)	$y = 700,\ x + y = 800$
E	(0,700)	$x = 0,\ y = 700$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अब उद्देश्य फलन

$$Z = 3x + 4y$$

का मान ज्ञात करते हैं।

कोना	$Z = 3x + 4y$
(0,0)	0
(400,0)	1200
(400,200)	2000
(200,600)	3000
(100,700)	3100
(0,700)	2800

Z का अधिकतम मान **3100** है,

जो बिन्दु

$$(100,700)$$

पर प्राप्त होता है।

उत्तर :

$$\boxed{Z \text{ का अधिकतम मान } = 3100}$$

$$\boxed{(x, y) = (100, 700) \text{ पर}}$$

अथवा

दो प्रकार के उर्वरक A और B हैं। A में 12% नाइट्रोजन और 5% फास्फोरिक अम्ल है; जबकि B में 4% नाइट्रोजन और 5% फास्फीरिक अम्ल है। मिट्टी की स्थितिओं का परीक्षण करने के पश्चात् एक किसान पाता है कि उसे अपनी फसल के लिए कम से कम 12 kg नाइट्रोजन और 12 kg फास्फोरिक अम्ल की आवश्यकता है। यदि A की कीमत ₹ 110 प्रति किलो और B की कीमत ₹48 प्रति किलो है, तो प्रत्येक प्रकार का कितना उर्वरक उपयोग के लिए चाहिए ताकि न्यूनतम मूल्य पर वांछित पोषक तत्व मिल सके?

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित कीजिए और आलेख विधि से समस्या को हल कीजिए।

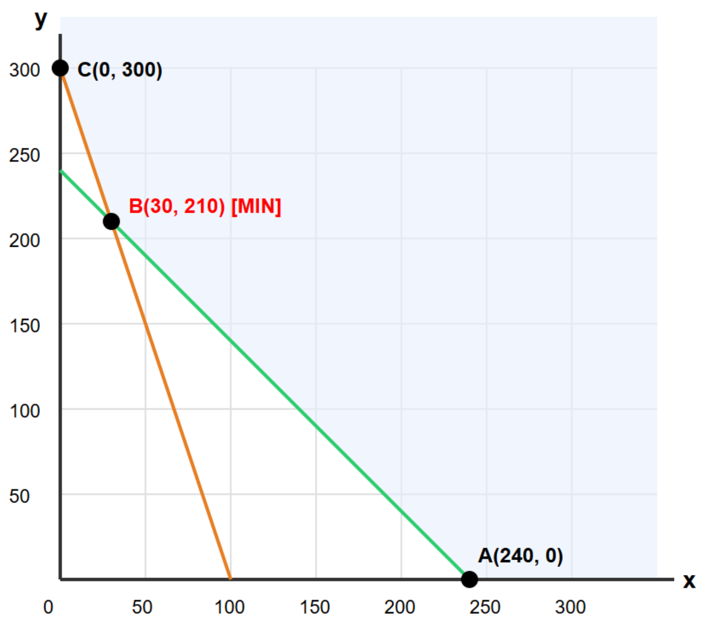
हल - माना,

- x =उर्वरक Aकी मात्रा (किग्रा में)
- y =उर्वरक Bकी मात्रा (किग्रा में)

उद्देश्य फलन

$$\boxed{Z = 110x + 48y}$$

जिसका **न्यूनतम** करना है।



प्रतिबन्ध

नाइट्रोजन की आवश्यकता :

चूँकि उर्वरक Aमें 12% तथा उर्वरक Bमें 4% नाइट्रोजन है,

$$0.12x + 0.04y \geq 12$$

25 से गुणा करने पर,

$$\boxed{3x + y \geq 300.}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

फॉस्फोरिक अम्ल की आवश्यकता :

चूँकि दोनों उर्वरकों में 5% फॉस्फोरिक अम्ल है,

$$0.05x + 0.05y \geq 12$$

20 से गुणा करने पर,

$$\boxed{x + y \geq 240.}$$

साथ ही,

$$\boxed{x \geq 0, y \geq 0.}$$

साध्य क्षेत्र (Feasible Region) के कोने

सीमा रेखाएँ हैं,

$$3x + y = 300$$

तथा

$$x + y = 240.$$

इनका प्रतिच्छेद ज्ञात करने के लिए,

$$3x + y = 300$$
$$x + y = 240.$$

घटाने पर,

$$2x = 60$$

$$x = 30.$$

मान रखने पर,

$$30 + y = 240$$
$$y = 210.$$

अतः,

$$(30,210)$$

एक कोना है।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

अन्य कोने हैं,

$$(0,300)$$

तथा

$$(240,0).$$

Z का मान

कोना	$Z = 110x + 48y$
(0,300)	14400
(30,210)	13380
(240,0)	26400

Z का न्यूनतम मान

$$13380$$

बिन्दु

$$(x, y) = (30,210)$$

पर प्राप्त होता है।

उत्तर

$$\boxed{\text{उर्वरक } A = 30 \text{ किग्रा}}$$

$$\boxed{\text{उर्वरक } B = 210 \text{ किग्रा}}$$

$$\boxed{\text{न्यूनतम लागत } = ₹13,380}$$

∴ किसान को न्यूनतम लागत पर पोषक तत्वों की आवश्यकता पूरी करने के लिए उर्वरक A के 30 किग्रा तथा उर्वरक B के 210 किग्रा का प्रयोग करना चाहिए।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Q45 - $\int_2^4 2^x\ dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल – परिभाषा के अनुसार, योग की सीमा के रूप में समाकलन है:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh),$$

जहाँ,

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

यहाँ,

$$f(x) = 2^x, a = 2, b = 4.$$

$$h = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}.$$

अतः $n \to \infty$होने पर,

$$h \to 0.$$

योग का रूप लिखने पर,

$$\int_2^4 2^x\ dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(2+rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} 2^{2+rh}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} 4\cdot 2^{rh}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4h \sum_{r=0}^{n-1} (2^h)^r.$$

ज्यामितीय श्रेणी (Geometric Progression) के सूत्र

$$\sum_{r=0}^{n-1} q^r = \frac{q^n-1}{q-1},$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

जहाँ $q = 2^h$, का प्रयोग करने पर,

$$= \lim_{h \to 0} 4h \frac{(2^h)^n - 1}{2^h - 1}.$$

चूँकि

$$nh = 2,$$

अतः,

$$= \lim_{h \to 0} 4h \frac{2^{nh} - 1}{2^h - 1} = \lim_{h \to 0} 4h \frac{2^2 - 1}{2^h - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h}{2^h - 1} \times 3$$

$$= 12 \lim_{h \to 0} \frac{h}{2^h - 1}.$$

मानक सीमा का प्रयोग करने पर,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log_e a,$$

अतः,

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{2^h - 1} = \frac{1}{\log_e 2}.$$

$$= 12 \times \frac{1}{\log_e 2}.$$

$$\boxed{\int_2^4 2^x \, dx = \frac{12}{\log_e 2}}$$

अथवा

दीर्घवृत् $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और सरल रेख $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ द्वारा घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल, समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

हल – हमें निम्न से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करना है:

- दीर्घवृत्त:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- रेखा:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

चरण 1 : प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए

रेखा से,

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow y=b\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

यह रेखा अक्षों को

$$(a,0)$$

तथा

$$(0,b)$$

पर काटती है।

दीर्घवृत्त भी इन्हीं बिन्दुओं

$$(a,0)$$

तथा

$$(0,b)$$

से होकर गुजरता है।

अतः दोनों वक्र

$$A=(a,0)$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

तथा

$$B = (0, b)$$

पर प्रतिच्छेद करते हैं।

चरण 2 : दोनों वक्रों से yका मान ज्ञात कीजिए (प्रथम चतुर्थांश में)

दीर्घवृत्त से,

$$y_{\text{ellipse}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

रेखा से,

$$y_{\text{line}} = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

चरण 3 : छोटे क्षेत्र की पहचान

प्रथम चतुर्थांश में रेखा और दीर्घवृत्त के बीच का छोटा क्षेत्र वह है जहाँ

$$y_{\text{ellipse}} \geq y_{\text{line}}, 0 \leq x \leq a.$$

अतः आवश्यक क्षेत्रफल

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_0^a y_{\text{ellipse}}\ dx - \int_0^a y_{\text{line}}\ dx.$$

चरण 4 : रेखा के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

$$\int_0^a b\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = b\left[x - \frac{x^2}{2a}\right]_0^a$$

$$= b\left[a - \frac{a^2}{2a}\right]$$

$$= b\left[a - \frac{a}{2}\right]$$

$$= b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2}.$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

चरण 5 : दीर्घवृत्त के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

मानक सूत्र

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

का प्रयोग करने पर,

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}.$$

चरण 6 : अभीष्ट क्षेत्रफल

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}.$$

$$\boxed{\text{क्षेत्रफल} = \frac{ab}{4}(\pi - 2)\ \text{वर्ग इकाई}}$$

All Rights Reserved © Manish Verma (MVS Foundation), for more Notes visit https://www.mvsfoundation.in/

Thank you!

We hope you found this material helpful. We wish you the very best for your examination.

Strive for Excellence – Your Path to Success