



$$A = \frac{m}{(m^2 + c)^2}$$



NIOS PYQ's SOLUTIONS

$$fa = bc^2$$

$$\sqrt{h-x^2}$$

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS & ANSWERS



APRIL-2024

Your Path to Success

खंड – अ

A. ☐
B. ☒
C. ☐

Q1 – रेखा $4x - 3y + 6 = 0$ के x-अन्तः खण्ड तथा y-अन्तःखण्ड हैं, क्रमशः

(A) $-\frac{3}{2}, -2$

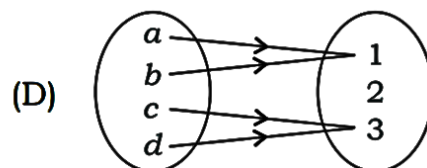
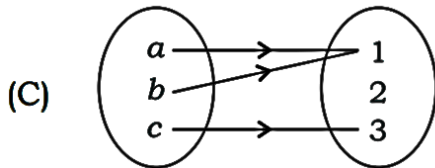
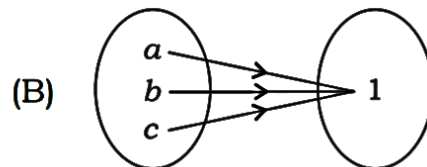
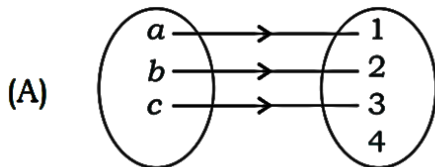
(B) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{3}{2}, 2$

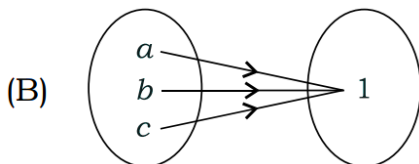
(D) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

हल - (C) $-\frac{3}{2}, 2$

Q2 – (a) निम्न में से कौन-सा एक प्रतिचित्रण, आच्छादक फलन को निरूपित करता है?



हल -



अथवा

(b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $-\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{4\pi}{3}$

हल - (C) $\frac{2\pi}{3}$



Q3 - (a) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 18 & 4 \end{vmatrix}$ तथा $x > 0$, तो x का मान है

(A) 4

(B) 9

(C) 6

(D) 36

हल - (C) 6

अथवा

(b) यदि $2 \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ तो x तथा y के मान हैं

(A) $x = 3, y = 9$

(B) $x = 9, y = 3$

(C) $x = 0, y = 0$

(D) $x = 4, y = 8$

हल - (A) $x = 3, y = 9$

Q4 - (a) रेखा $y + 3 = 0$ की प्रवणता है

(A) 0

(B) 1

(C) -3

(D) -1

हल - (A) 0

अथवा

(b) प्रवणता $-\frac{3}{2}$ था बिन्दु $(-1, 2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है

(A) $3x - 2y + 1 = 0$

(B) $3x + 2y + 1 = 0$

(C) $3x - 2y - 1 = 0$

(D) $3x + 2y - 1 = 0$

हल - (D) $3x + 2y - 1 = 0$



Q5 - वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ पर $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ पर स्पर्शरेखा की प्रवणता है

(A) 1

(B) - 1

(C) 2

(D) $-\frac{1}{2}$

हल - (B) - 1

Q6 - (a) y-अक्ष की दिक् कोज्याएँ हैं

(A) 1, 1, 0

(B) 1, 0, 1

(C) 0, 1, 0

(D) 0, 1, 1

हल - (C) 0, 1, 0

अथवा

(b) सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एक मात्रक सदिश है

(A) $\frac{4}{\sqrt{45}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{45}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{45}}\hat{k}$

(B) $\frac{4}{\sqrt{45}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{45}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{45}}\hat{k}$

(C) $\frac{4}{\sqrt{41}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\hat{k}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{17}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{17}}\hat{k}$

हल - (C) $\frac{4}{\sqrt{41}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\hat{k}$

Q7 - यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ तो $x + y + z$ का मान है

(A) 0

(B) - 2

(C) 1

(D) 2

हल - (D) 2



Q8 - (a) वह अन्तराल, जिसमें फलन $f(x) = \sin x, x \in (0, 2\pi)$ हासमान है, है

(A) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(B) $(0, \pi)$

(C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

(D) $(\pi, 2\pi)$

हल - (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

अथवा

(b) x का वह मान, जिस पर फलन $f(x) = 2\cos x + x$ उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ है, है

(A) $\frac{\pi}{6}$

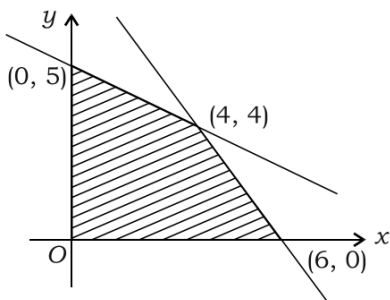
(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

हल - (A) $\frac{\pi}{6}$

Q9 - (a) एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का संभाव्य क्षेत्र (छायांकित) आकृति में दर्शाया गया है। निम्न में से किस बिन्दु/किन बिन्दुओं पर $Z = 3x + 8y$ अधिकतम होगा?



(A) (0, 5)

(B) (4, 4)

(C) (6, 0) and (0, 5)

(D) बिन्दुओं (4, 4) तथा (6, 0) को जोड़ने वाली रेखा के प्रत्येक बिन्दु पर

हल - (B) (4, 4)



अथवा

(b) दिए गए कथन का विलोम क्या है?

"यदि n एक धनात्मक संख्या है, तो n^3 एक धनात्मक संख्या है।"

(A) यदि n एक धनात्मक संख्या नहीं है, तो n^3 एक धनात्मक संख्या नहीं है।

(B) यदि n^3 एक धनात्मक संख्या नहीं है, तो n एक धनात्मक संख्या नहीं है।

(C) यदि n^3 एक धनात्मक संख्या है, तो n एक धनात्मक संख्या है।

(D) यदि n एक धनात्मक संख्या है, तो n^3 एक धनात्मक संख्या नहीं है।

हल - (C) यदि n^3 एक धनात्मक संख्या है, तो n एक धनात्मक संख्या है।

Q10 - वृत्त $x^2 + y^2 + 3x - y = 4$ के केन्द्र तथा त्रिज्या हैं, क्रमशः

(A) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{6}}{2}$

(B) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \sqrt{\frac{13}{2}}$

(C) $(-3, 1), \sqrt{14}$

(D) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{26}}{2}$

हल - (D) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{26}}{2}$

Q11 - निम्न अवकल समीकरण का घात है $4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 1 = 0$

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 2

हल - (B) 3

Q12 - (a) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो x का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{6}$



हल - (B) $\frac{\pi}{3}$

अथवा

(b) यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 5$, तो $|2A'|$ का मान है

(A) - 40

(B) 10

(C) - 10

(D) 40

हल - (D) 40

Q13 - बिन्दु P, Q तथा R के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} - 2\vec{b}$, $3\vec{a} - 4\vec{b}$ तथा $7\vec{a} - 8\vec{b}$ हैं। यदि $\vec{QR} = \lambda \vec{PQ}$, तो λ का मान है

(A) 2

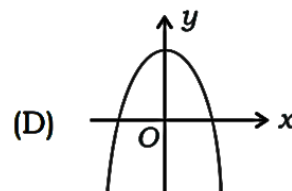
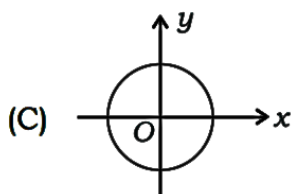
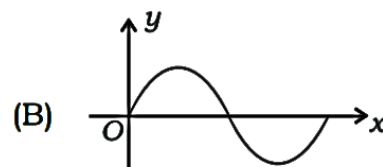
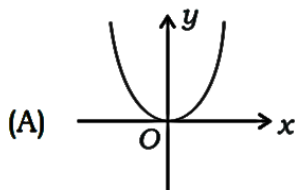
(B) 4

(C) $\frac{1}{2}$

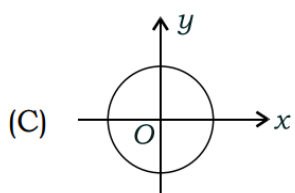
(D) - 2

हल - (A) 2

Q14 - निम्न में से कौन-सा एक ग्राफ, फलन के ग्राफ को निरूपित नहीं करता ?



हल -



Q15 - (a) $\log x$ के सापेक्ष $\sin x$ का अवकलज है

(A) $\frac{\cos x}{x}$

(B) $x \cos x$

(C) $\frac{1}{x \cos x}$

(D) $\frac{x}{\cos x}$

हल - (B) $x \cos x$

अथवा

(b) यदि $y = \sin^{-1}(\cos x)$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $-\frac{1}{\sin x}$

(B) $\operatorname{cosec} x$

(C) 1

(D) -1

हल - (D) -1

Q16 - यदि $A = [a_{ij}]$ कोटि 2×3 का एक आव्यूह है तथा $a_{ij} = \frac{i+2j}{2}$, तो आव्यूह A है

(A) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 3 \\ 2 & 3 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

हल -

(C) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Q17 - (a) मूल बिन्दु से समतल $\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}\right) = 4$ की दूरी है

(A) 4

(B) 28



(C) $\frac{1}{7}$

(D) $\sqrt{7}$

हल - (A) 4

अथवा

(b) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ मात्रक सदिश हैं, तो $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2$ का मान है

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) $\sin\theta + \cos\theta$

हल - (B) 1

Q18 - निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक है $\frac{dy}{dx} + 4\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$

(A) $4x$

(B) x^2

(C) x^4

(D) $\frac{4}{x}$

हल - (C) x^4

Q19 - (a) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx =$

(A) $x - \cos x + c$

(B) $x + \cos x + c$

(C) $x + \sin x + c$

(D) $x - \sin x + c$

हल - (B) $x + \cos x + c$

अथवा

(b) $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx =$

(A) $\left(\frac{\log x}{3}\right)^3 + C$

(B) $\frac{\log x^3}{3} + C$

(C) $\frac{(\log x)^3}{3} + C$

(D) $\left(\log \frac{x}{3}\right)^3 + C$

हल - (C) $\frac{(\log x)^3}{3} + C$



Q20 - निम्न में से कौन-सा एक कथन सत्य है?

- (A) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक इकाई आव्यूह है।
- (B) प्रत्येक इकाई आव्यूह एक अदिश आव्यूह है।
- (C) प्रत्येक विकर्ण आव्यूह एक इकाई आव्यूह है।
- (D) एक वर्ग आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव 1 है, एक इकाई आव्यूह है।

हल - (B) प्रत्येक इकाई आव्यूह एक अदिश आव्यूह है।

Q21 - रिक्त स्थान भरिए:

- (a) माना * एक द्वि-आधारी संक्रिया $a*b = b - 2a$ द्वारा परिभाषित है, तो $(1*2) * 3$ का मान ____ है।
- (b) समुच्चय A पर एक सम्बन्ध R ____ कहलाता है, यदि $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ सभी $a, b, c \in A$ के लिए।

हल - (a) 3

(b) संक्रामक

Q22 - स्तंभ-1 में दिए गए समाकलन का स्तंभ-II में दिए गए इसके सही हल से मिलान कीजिए :

स्तंभ -I

- (a) $\int \sin x \, dx$
- (b) $\int \sec^2 x \, dx$

स्तंभ -II

- (P) $\cos x + c$
- (Q) $\log(\sin x) + c$
- (R) $\tan x + c$
- (S) $-\cos x + c$

हल -

(a) $\int \sin x \, dx \rightarrow (S) -\cos x + c$

(b) $\int \sec^2 x \, dx \rightarrow (R) \tan x + c$

Q23 - रिक्त स्थान भरिए ((a) से (d) में से कोई दो उपभाग कीजिए) :

- (a) माना $f : R \rightarrow R, f(x) = 2^x$ द्वारा परिभाषित है, तो $(f \circ f)(0)$ बराबर है ____ के।



हल - 2

(b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान ____ है।

हल - $\frac{2\pi}{3}$

(c) यदि $\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = x$, तो $\cos x$ का मान ____ है।

हल - $\frac{3}{4}$

(d) समुच्चय A पर एक द्वि-आधारी संक्रिया * एक फलन है, जो ____ से A तक है।

हल - $A \times A$

Q24 - (a) से (d) में से किन्हीं दो उपभागों के उत्तर दीजिए :

(a) कथन, " $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नहीं है" का निषेधन लिखिए।

हल - $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

(b) कथन, "यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x एक सम संख्या है" का विलोम लिखिए।

हल - यदि x एक सम संख्या है, तो x एक अभाज्य संख्या है।

(c) कथन, "यदि कोई संख्या विषम है, तो इसका वर्ग ऋणात्मक नहीं है" का प्रतिसकारात्मक रूप लिखिए।

हल - यदि किसी संख्या का वर्ग ऋणात्मक है, तो वह संख्या विषम नहीं है।

(d) 'यदि और केवल यदि' की सहायता से कथन P तथा Q को जोड़िए :

P : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हैं, तो यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

Q : यदि कोई त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है, तो इसके दो कोण बराबर हैं।

हल - एक त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है यदि और केवल यदि इसके दो कोण बराबर हैं।

Q25 - रिक्त स्थान भरिए ((a) से (f) में से कोई चार उपभाग कीजिए) :

(a) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में मात्रक सदिश ____ है।

हल - $\frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$.

(b) तीन निर्देशांक समतल पूरे आकाश को आठ भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें ____ कहते हैं।



हल - अष्टांश

(c) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

हल - $2(\vec{a} \times \vec{b})$.

(d) रेखा, जिसके दिक् अनुपात 1, 3, -2 हैं, पर लम्ब तथा बिन्दु (2, -3, 4) से होकर गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण $\underline{\hspace{2cm}}$ है।

हल - $x + 3y - 2z + 15 = 0$.

(e) z-अक्ष पर समतल $2x - 3y + 5z - 30 = 0$ का अन्तः खण्ड $\underline{\hspace{2cm}}$ है।

हल - 6.

(f) रेखा $\vec{r} = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k})$ के समीकरण का कार्तीय रूप $\underline{\hspace{2cm}}$ है।

हल - $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{-3}$

Q26 - दीर्घवृत्त $16x^2 + y^2 = 16$, के लिए निम्न ज्ञात कीजिए ((a) से (f) में से कोई चार उपभाग कीजिए) :

(a) दीर्घ अक्ष की लम्बाई

(b) लघु अक्ष की लम्बाई

(c) उत्केन्द्रता

(d) नाभि

(e) नियताओं के समीकरण

(f) नाभिलम्ब की लम्बाई

हल - (a) 8

(b) 2

(c) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(d) $(0, \pm\sqrt{15})$

(e) $y = \pm \frac{16}{\sqrt{(15)}}$

(f) $\frac{1}{2}$



Q27 - रिक्त स्थान भरिए (a) से (f) में से कोई चार उपभाग कीजिए :

(a) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, तो $A' = \underline{\hspace{2cm}}$.

हल - $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(b) यदि A एक विषम सममित आव्यूह है, तो इसके विकर्ण के सभी अवयव $\underline{\hspace{2cm}}$ हैं।

हल - शून्य

(c) यदि $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = [3 \quad -1 \quad 2]$, तो $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.

हल - $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) यदि $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2x-1 & 2x+1 \end{vmatrix} = 5$ तथा $x > 0$, तो $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

हल - 1

(e) बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ संरेखी हैं, यदि $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

हल - 0

(f) माना रैखिक समीकरण निकाय $AX = B$ का अद्वितीय हल है, तो इसका हल $X = \underline{\hspace{2cm}}$ द्वारा दिया जाता है।

हल - $A^{-1}B$

Q28 - निम्न समाकलनों के मान निकालिए ((i) से (vi) में से कोई चार उपभाग कीजिए) :

(a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int e^{3\log x} \cdot x^4 dx$

(c) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$



(e) $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x) dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$

हल - (a) $2 \sin \sqrt{x} + C$

(b) $\frac{x^8}{8} + C$

(c) $\sin^{-1}(\tan x) + C$

(d) $\frac{\pi}{4}$

(e) $-\cot x - \operatorname{cosec} x + C$

(f) $1/2$

Q29 - रिक्त स्थान भरिए ((a) से (i) में से कोई छः उपभाग कीजिए) :

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) यदि $x = 3$ पर $f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$ सतत है, तो a का मान $\underline{\hspace{2cm}}$ है।

(d) यदि $y = (x^2 - 1)^2$, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(e) यदि $y = \tan \sqrt{x}$, तो $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(f) यदि $f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{x + 4}$, तो $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(g) वृत्त के क्षेत्रफल में त्रिज्या के सापेक्ष परिवर्तन की दर, जब $r = 4$ cm है, $\underline{\hspace{2cm}}$ होगी।

(h) $f(x) = \cos x, x \in (0, 2\pi)$ अन्तराल $\underline{\hspace{2cm}}$ में वर्धमान है।

(i) वक्र $y = x^3 - x$ के लिए $x = 2$ पर स्पर्शरेखा की प्रवणता $\underline{\hspace{2cm}}$ है।

हल - (a) 4



(b) 2

(c) 2

(d) $12x^2 - 4$

(e) $\frac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

(f) $\frac{2}{5}$

(g) 8π

(h) $(\pi, 2\pi)$

(i) 11



खंड – ब

 A. ☐
 B. ☒
 C. ☐


Q30 - सारणिकों का प्रयोग करते हुए पता लगाइए कि बिन्दु $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ तथा $(c, a + b)$ एक त्रिभुज बनाते हैं या नहीं।

हल -

यह निर्धारित करने के लिए कि बिन्दु

$$A(a, b + c), \quad B(b, c + a), \quad C(c, a + b)$$

त्रिभुज बनाते हैं या नहीं, हम सारणिक की शर्त का उपयोग करके जाँच करते हैं कि क्या वे सरिखी हैं।

बिन्दु त्रिभुज बनाएँगे यदि

$$\begin{vmatrix} a & b + c & 1 \\ b & c + a & 1 \\ c & a + b & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

अब सारणिक का मान निकालते हैं।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b + c & 1 \\ b & c + a & 1 \\ c & a + b & 1 \end{vmatrix}$$

संक्रिया लागू करें:

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2, \quad R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

तब,

$$= \begin{vmatrix} a - b & (b + c) - (c + a) & 0 \\ b - c & (c + a) - (a + b) & 0 \\ c & a + b & 1 \end{vmatrix}$$

सरल करें:

$$= \begin{vmatrix} a - b & b - a & 0 \\ b - c & c - b & 0 \\ c & a + b & 1 \end{vmatrix}$$

गुणनखंड करें:

$$b - a = -(a - b), \quad c - b = -(b - c)$$



अतः पहली दो पंक्तियाँ बनती हैं:

$$= \begin{vmatrix} a-b & -(a-b) & 0 \\ b-c & -(b-c) & 0 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

उभयनिष्ठ गुणनखंड बाहर लें:

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

अब पहली दो पंक्तियाँ समान हैं।

अतः सारणिक:

$$\Delta = 0$$

इसलिए, तीनों बिन्दु सरिखी हैं।

अंतिम निष्कर्ष:

बिन्दु त्रिभुज नहीं बनाते (वे सरिखी हैं)।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

हल -

दिया गया है कि हमें सिद्ध करना है

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

चरण 1: पंक्ति संक्रियाएँ लागू करें

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1, \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

तब,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ x-4 & 4-x & 0 \\ x-4 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$



चरण 2: गुणनखंड निकालें

ध्यान दें:

$$x - 4 = -(4 - x)$$

अतः R_2 और R_3 से $(4 - x)$ उभयनिष्ठ लें:

$$\Delta = (4 - x)^2 \begin{vmatrix} x + 4 & 2x & 2x \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

चरण 3: प्रथम पंक्ति के अनुदिश विस्तार करें

$$= (4 - x)^2 \left[(x + 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2x \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

अब उपसारणिकों की गणना करें:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

प्रतिस्थापन करने पर:

$$\begin{aligned} &= (4 - x)^2 [(x + 4) - 2x(-1) + 2x(1)] \\ &= (4 - x)^2 [(x + 4) + 2x + 2x] \\ &= (4 - x)^2 (5x + 4) \end{aligned}$$

अंतिम परिणाम

$$\begin{vmatrix} x + 4 & 2x & 2x \\ 2x & x + 4 & 2x \\ 2x & 2x & x + 4 \end{vmatrix} = (5x + 4)(4 - x)^2$$

अतः सिद्ध हुआ।

Q31 - x के लिए हल कीजिए : $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

हल -



दिया गया समीकरण:

$$2 \tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$$

चरण 1: सर्वसमिका का प्रयोग करें

$$2 \tan^{-1} a = \tan^{-1} \left(\frac{2a}{1-a^2} \right)$$

माना $a = \cos x$

$$2 \tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cos x}{1 - \cos^2 x} \right)$$

चूँकि

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 x &= \sin^2 x \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{2 \cos x}{\sin^2 x} \right) \end{aligned}$$

चरण 2: आर्गुमेंट समान करें

$$\tan^{-1} \left(\frac{2 \cos x}{\sin^2 x} \right) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$$

अतः

$$\frac{2 \cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

चरण 3: सरल करें

2 निरस्त करें:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}$$

$\sin^2 x$ से गुणा करें:

$$\cos x = \sin x$$

चरण 4: हल करें

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



अथवा

यदि $f: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{4, 5, 6, 10\}$ तथा $g: \{4, 5, 6, 10\} \rightarrow \{8, 12, 16\}$ दो फलन $f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 6, f(6) = 6$ तथा $g(4) = 8, g(5) = 8, g(6) = 12, g(10) = 12$, द्वारा परिभाषित हैं, तो $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

हल -

दिया गया है:

$$f: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{4, 5, 6, 10\}$$

$$g: \{4, 5, 6, 10\} \rightarrow \{8, 12, 16\}$$

परिभाषित है:

$$f(3) = 4, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 6, \quad f(6) = 6$$

$$g(4) = 8, \quad g(5) = 8, \quad g(6) = 12, \quad g(10) = 12$$

हमें $g \circ f$ ज्ञात करना है।

परिभाषा के अनुसार,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

अब f के प्रांत के प्रत्येक अवयव के लिए मान निकालते हैं:

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 8$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 8$$

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(6) = 12$$

$$(g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(6) = 12$$

अंतिम उत्तर:

$$g \circ f = \{(3, 8), (4, 8), (5, 12), (6, 12)\}$$

या समान रूप से,

$$(g \circ f)(3) = 8, \quad (g \circ f)(4) = 8, \quad (g \circ f)(5) = 12, \quad (g \circ f)(6) = 12$$

Q32 - x-अक्ष तथा बिन्दुओं (5, 4) तथा (6, 3) को मिलाने वाली रेखा के बीच बना कोण ज्ञात कीजिए।

हल -

दिए गए बिन्दु:

$$A(5, 4), \quad B(6, 3)$$



चरण 1: रेखा की प्रवणता ज्ञात करें

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 - 4}{6 - 5}$$

$$m = \frac{-1}{1} = -1$$

चरण 2: x-अक्ष के साथ कोण

यदि कोई रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ कोण बनाती है, तो

$$\tan \theta = m$$

$$\tan \theta = -1$$

जिस कोण की स्पर्शज्या -1 है, वह है

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

परंतु रेखा और x-अक्ष के बीच का कोण न्यून कोण के रूप में लिया जाता है, अतः

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Q33 – निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए: $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$.

हल –

दिया गया अवकल समीकरण:

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$$

चरण 1: मानक रैखिक रूप में लिखें

$x \neq 0$ के लिए x से भाग दें:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

यह निम्न रूप का है:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$



जहाँ

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = x$$

चरण 2: समाकलन गुणक ज्ञात करें

$$\begin{aligned} \text{समाकलन गुणक} &= e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} \\ &= e^{2 \ln |x|} = x^2 \end{aligned}$$

चरण 3: समीकरण को x^2 से गुणा करें

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$$

बायाँ पक्ष बनता है:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y)$$

अतः,

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^3$$

चरण 4: समाकलन करें

$$\begin{aligned} x^2 y &= \int x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + C \end{aligned}$$

चरण 5: y के लिए हल करें

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^4}{4x^2} + \frac{C}{x^2} \\ y &= \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

Q34 – एक सदिश $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ के साथ क्रमशः $\frac{\pi}{3}$ और $\frac{\pi}{2}$ माप का कोण बनाता है। इसका $\overrightarrow{OZ}$ के साथ बना कोण ज्ञात कीजिए।

हल -



माना सदिश OX, OY तथा OZ के साथ क्रमशः निम्न कोण बनाता है:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ OX के साथ, } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ OY के साथ, } \gamma \text{ OZ के साथ}$$

त्रिविमीय में किसी सदिश के लिए दिक्-कोज्याएँ संतुष्ट करती हैं:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

अब गणना करें:

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \beta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

प्रतिस्थापन करें:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{3}{4}$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

मुख्य कोण (0 और π के बीच) लेने पर:

$$\gamma = \frac{\pi}{6}$$

Q35 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ के लिए A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल -

दिया गया है:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

एक 2×2 आव्यूह के लिए

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$



और

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

चरण 1: सारणिक ज्ञात करें

$$|A| = (1)(5) - (2)(2)$$

$$|A| = 5 - 4 = 1$$

चरण 2: व्युत्क्रम ज्ञात करें

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Q36 – बिन्दुओं (2,-3) तथा (5, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल –

माना बिन्दु

$$A(2, -3), \quad B(5, 6)$$

माना y-अक्ष रेखाखंड AB को बिन्दु P पर $m : n$ के अनुपात में (आंतरिक रूप से) विभाजित करता है।

विभाजन सूत्र के अनुसार:

$$x_P = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

चूँकि P y-अक्ष पर स्थित है,

$$x_P = 0$$

$x_1 = 2, x_2 = 5$ रखने पर:

$$0 = \frac{5m + 2n}{m + n}$$

अतः,

$$5m + 2n = 0$$

$$5m = -2n$$

$$\frac{m}{n} = -\frac{2}{5}$$



ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि विभाजन बाह्य है।

अतः अनुपात है

$$2 : 5 \text{ (बाह्य रूप से)}$$

Q37 - अवकलन का प्रयोग करते हुए $\sqrt{0.6}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल -

माना

$$y = \sqrt{x}$$

हम $x = 0.64$ के निकट अवकलज का उपयोग करके $\sqrt{0.6}$ का सन्निकटन करते हैं (क्योंकि $0.64 = 0.8^2$)।

माना

$$x_0 = 0.64$$

$$y_0 = \sqrt{0.64} = 0.8$$

अब,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

जब $x = 0.64$ पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(0.8)} = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

अब,

$$dx = 0.6 - 0.64 = -0.04$$

अवकल का प्रयोग करते हुए:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

$$dy = 0.625(-0.04)$$

$$dy = -0.025$$

अतः,

$$\sqrt{0.6} \approx y_0 + dy$$

$$= 0.8 - 0.025$$

$$= 0.775$$

$$\boxed{\sqrt{0.6} \approx 0.775}$$



अथवा

$y = x^{x \cos x}$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल -

दिया गया है

$$y = x^{x \cos x}$$

चरण 1: लघुगणक लें

$$\ln y = x \cos x \ln x$$

चरण 2: अस्पष्ट अवकलन करें

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x \cos x \ln x)$$

तीन गुणकों के लिए गुणनफल नियम का प्रयोग करें।

माना $u = x \cos x$, $v = \ln x$

$$\frac{d}{dx} (uv) = u'v + uv'$$

पहले u' ज्ञात करें:

$$u = x \cos x$$

$$u' = \cos x - x \sin x$$

अब अवकलन करें:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (\cos x - x \sin x) \ln x + x \cos x \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\cos x - x \sin x) \ln x + \cos x \end{aligned}$$

चरण 3: y से गुणा करें

$$\frac{dy}{dx} = y [(\cos x - x \sin x) \ln x + \cos x]$$

चूँकि $y = x^{x \cos x}$,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^{x \cos x} [(\cos x - x \sin x) \ln x + \cos x]}$$



Q38 - बिन्दुओं (2, 5, -1) तथा (-1, 4, 3) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर तथा बिन्दु (4, 3, 0) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल -

दिए गए बिन्दु

$$A(2, 5, -1), \quad B(-1, 4, 3)$$

चरण 1: रेखा AB का दिशा सदिश ज्ञात करें

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-1 - 2, 4 - 5, 3 - (-1)) \\ &= (-3, -1, 4)\end{aligned}$$

अतः आवश्यक रेखा के समांतर दिशा सदिश है

$$\vec{d} = -3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

चरण 2: सदिश समीकरण लिखें

रेखा बिन्दु (4, 3, 0) से होकर जाती है।

बिन्दु का स्थिति सदिश:

$$\vec{r}_0 = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

रेखा का सदिश समीकरण:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{d}$$

अतः,

$$\boxed{\vec{r} = (4\hat{i} + 3\hat{j}) + \lambda(-3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})}$$

अथवा

वह सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 6 है तथा जो सदिशों $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ दोनों पर लम्ब है।

हल -

दिया गया है

$$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$



दोनों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ पर लंब सदिश होगा

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

चरण 1: सदिश गुणनफल ज्ञात करें

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}[(-1)(-2) - (3)(1)] - \hat{j}[(4)(-2) - (3)(-2)] + \hat{k}[(4)(1) - (-1)(-2)] \\ &= \hat{i}(2 - 3) - \hat{j}(-8 + 6) + \hat{k}(4 - 2) \\ &= -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

चरण 2: परिमाण ज्ञात करें

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

चरण 3: परिमाण 6 बनाएँ

इस दिशा में मात्रक सदिश:

$$\frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

6 से गुणा करें:

$$\begin{aligned}6 \cdot \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} &= 2(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ &= -2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}\end{aligned}$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}$$

Q39 - ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2}{x^2+6x+12} dx$

हल -

$$I = \int \frac{x^2}{x^2 + 6x + 12} dx$$

चरण 1: अंश को पुनर्लिखें

$$x^2 = (x^2 + 6x + 12) - (6x + 12)$$



अतः,

$$\begin{aligned} I &= \int \left[1 - \frac{6x + 12}{x^2 + 6x + 12} \right] dx \\ &= \int 1 dx - \int \frac{6x + 12}{x^2 + 6x + 12} dx \\ &= x - \int \frac{6x + 12}{x^2 + 6x + 12} dx \end{aligned}$$

चरण 2: अंश को विभाजित करें

$$6x + 12 = 3(2x + 6) - 6$$

$$I = x - 3 \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 12} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$$

चरण 3: प्रथम समाकल

माना $u = x^2 + 6x + 12$

$$\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 12} dx = \ln |x^2 + 6x + 12|$$

अतः,

$$-3 \ln |x^2 + 6x + 12|$$

चरण 4: द्वितीय समाकल

वर्ग पूर्ण करें:

$$x^2 + 6x + 12 = (x + 3)^2 + 3$$

$$\int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}} \right)$$

अतः,

$$6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}} \right)$$

अंतिम उत्तर

$$x - 3 \ln |x^2 + 6x + 12| + 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}} \right) + C$$

अथवा



मान ज्ञात कीजिए : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

हल -

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$$

चरण 1: गुणधर्म का प्रयोग करें

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

यहाँ,

$$a = \frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{\pi}{3}$$

$$a+b = \frac{\pi}{2}$$

अतः,

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx$$

चूँकि

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{1}{\sqrt{\tan x}}$$

अतः,

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\tan x}}} dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}} dx$$

चरण 2: दोनों रूपों को जोड़ें

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} + \frac{\sqrt{\tan x}}{1+\sqrt{\tan x}} \right] dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 dx \end{aligned}$$



$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$I = \frac{\pi}{12}$$

Q40 – यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **and** $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **तो** $A^2 + B^2 + 2AB$ **ज्ञात कीजिए।**

हल –

दिया गया है

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

हम सर्वसमिका का प्रयोग करते हैं:

$$A^2 + B^2 + 2AB = (A + B)^2$$

चरण 1: $A + B$ ज्ञात करें

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+0 & 2+1 \\ 0+2 & 2+1 & 1+3 \\ 2+1 & 0-1 & 3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

चरण 2: $(A + B)(A + B)$ गुणा करें

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

अब पंक्ति से स्तम्भ गुणन करें।

प्रथम पंक्ति

$$(1, 1) = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9 + 0 + 9 = 18$$

$$(1, 2) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 3(-1) = 0 + 0 - 3 = -3$$

$$(1, 3) = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 9 + 0 + 9 = 18$$

द्वितीय पंक्ति

$$(2, 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6 + 6 + 12 = 24$$

$$(2, 2) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4(-1) = 0 + 9 - 4 = 5$$

$$(2, 3) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 + 12 = 30$$



तृतीय पंक्ति

$$(3, 1) = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9 - 2 + 9 = 16$$

$$(3, 2) = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 3(-1) = 0 - 3 - 3 = -6$$

$$(3, 3) = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 9 - 4 + 9 = 14$$

अंतिम उत्तर

$$A^2 + B^2 + 2AB = \begin{bmatrix} 18 & -3 & 18 \\ 24 & 5 & 30 \\ 16 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

Q41 - $\triangle ABC$ के शीर्ष $A(-3, 3)$, $B(5, -2)$ तथा $C(-1, -4)$ हैं। यदि M तथा N क्रमशः AB तथा AC के मध्य-बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि $MN = \frac{1}{2}BC$

हल -

दिया गया शीर्ष (Given vertices):

$$A(-3, 3), \quad B(5, -2), \quad C(-1, -4)$$

माना M तथा N , क्रमशः AB और AC के मध्य बिंदु हैं।

चरण 1: AB का मध्य बिंदु M ज्ञात करें

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(1, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

चरण 2: AC का मध्य बिंदु N ज्ञात करें

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{-3 + (-1)}{2}, \frac{3 + (-4)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-4}{2}, \frac{-1}{2} \right) \\ &= \left(-2, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

चरण 3: सदिश $\overrightarrow{MN}$ ज्ञात करें

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= N - M \\ &= \left(-2 - 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= (-3, -1) \end{aligned}$$



चरण 4: सदिश $\overrightarrow{BC}$ ज्ञात करें

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= C - B \\ &= (-1 - 5, -4 - (-2)) \\ &= (-6, -2)\end{aligned}$$

चरण 5: तुलना करें

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(-6, -2) = (-3, -1) \\ \overrightarrow{MN} &= (-3, -1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

अंतिम परिणाम

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

अतः सिद्ध हुआ।

अथवा

उस वृत्त का, जो बिन्दुओं $(2, 3)$ तथा $(-1, 1)$ से होकर गुजरता है तथा जिसका केन्द्र, रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है, समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल -

माना वृत्त का केन्द्र $C(h, k)$ है।

चूँकि वृत्त बिन्दुओं $A(2, 3)$ तथा $B(-1, 1)$ से होकर जाता है, अतः केन्द्र A और B से समान दूरी पर होगा।

चरण 1: समान दूरी की शर्त का उपयोग करें

$$CA = CB$$

$$(h - 2)^2 + (k - 3)^2 = (h + 1)^2 + (k - 1)^2$$

विस्तार करने पर:

$$h^2 - 4h + 4 + k^2 - 6k + 9 = h^2 + 2h + 1 + k^2 - 2k + 1$$

h^2 तथा k^2 निरस्त करने पर:

$$-4h - 6k + 13 = 2h - 2k + 2$$

$$-6h - 4k + 11 = 0$$

-1 से भाग देने पर:

$$6h + 4k - 11 = 0$$



चरण 2: केन्द्र रेखा पर स्थित है

दिया है:

$$h - 3k - 11 = 0$$

चरण 3: दोनों समीकरणों को हल करें

$$6h + 4k - 11 = 0$$

$$h - 3k - 11 = 0$$

दूसरे से:

$$h = 3k + 11$$

प्रतिस्थापन करने पर:

$$6(3k + 11) + 4k - 11 = 0$$

$$18k + 66 + 4k - 11 = 0$$

$$22k + 55 = 0$$

$$k = -\frac{55}{22} = -\frac{5}{2}$$

$$h = 3\left(-\frac{5}{2}\right) + 11$$

$$= -\frac{15}{2} + \frac{22}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

अतः केन्द्र:

$$C\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

चरण 4: त्रिज्या ज्ञात करें

$$r^2 = \left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 3\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{121}{4}$$



$$= \frac{130}{4} = \frac{65}{2}$$

अन्तिम समीकरण

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

Q42 – यदि $x = a \left(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2}\right)$ और $y = a \sin \theta$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल –

दिया गया प्राचल समीकरण:

$$x = a \left(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2}\right), \quad y = a \sin \theta$$

चरण 1: θ के सापेक्ष अवकलन करें

पहले,

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

अब x का अवकलन करें:

$$\frac{dx}{d\theta} = a \left(-\sin \theta + \frac{d}{d\theta} \log \tan \frac{\theta}{2}\right)$$

अब,

$$\frac{d}{d\theta} \log \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{d}{d\theta} \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}$$

सर्वसमिका का प्रयोग करें,

$$\frac{\sec^2 \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\sin \theta}$$

अतः,

$$\frac{d}{d\theta} \log \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin \theta}$$

इसलिए,

$$\frac{dx}{d\theta} = a \left(-\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta}\right) = a \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} = a \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$$



चरण 2: प्रथम अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a \cos \theta}{a \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta / \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

चरण 3: द्वितीय अवकलज

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}(\tan \theta) \bigg/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sec^2 \theta}{a \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}} = \frac{1/\cos^2 \theta}{a \cos^2 \theta / \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{a \cos^4 \theta}$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin \theta}{a \cos^4 \theta}}$$

Q43 - माना $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-4, \infty)$ एक फलन है, जो $f(x) = x^2 - 4$, द्वारा परिभाषित है, तो दर्शाइए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल -

दिया है

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-4, \infty), \quad f(x) = x^2 - 4$$

चरण 1: दर्शाएं कि f एकैकी (one-one) है

माना

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1 = \pm x_2$$

परन्तु चूंकि प्रांत $\mathbb{R}^+$ (धनात्मक वास्तविक संख्याएं) है,

$$x_1 = x_2$$

अतः f एकैकी है।



चरण 2: दर्शाएं कि f आच्छादक (onto) है

माना $y \in (-4, \infty)$.

$$y = x^2 - 4$$

$$x^2 = y + 4$$

$$x = \sqrt{y + 4}$$

चूंकि $y > -4, y + 4 > 0$, इसलिए $x \in \mathbb{R}^+$.

इस प्रकार प्रत्येक $y \in (-4, \infty)$ के लिए, $x \in \mathbb{R}^+$ का अस्तित्व है।

अतः f आच्छादक है।

चरण 3: प्रतिलोम ज्ञात कीजिए

$$y = x^2 - 4$$

$$x = \sqrt{y + 4}$$

इसलिए,

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}}$$

इस प्रकार, f एकैकी-आच्छादक (bijective) है और इसलिए व्युत्क्रमणीय (invertible) है।

Q44 - दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ तथा $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए, जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

हल -

दी गई रेखाएँ:

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 3}{5} = \frac{z + 5}{7}$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 6}{7}$$



चरण 1: प्राचलिक रूप में लिखें

पहली रेखा L_1 के लिए:

$$x = -1 + 3t, \quad y = -3 + 5t, \quad z = -5 + 7t$$

बिंदु $A(-1, -3, -5)$

दिक् सदिश

$$d_1 = (3, 5, 7)$$

दूसरी रेखा L_2 के लिए:

$$x = 2 + s, \quad y = 4 + 4s, \quad z = 6 + 7s$$

बिंदु $B(2, 4, 6)$

दिक् सदिश

$$d_2 = (1, 4, 7)$$

चरण 2: समतलीयता की जाँच करें

A और B को मिलाने वाला सदिश:

$$AB = (3, 7, 11)$$

सदिश गुणनफल ज्ञात करें:

$$d_1 \times d_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (7, -14, 7)$$

अब अदिश त्रिक गुणनफल:

$$AB \cdot (d_1 \times d_2) = (3, 7, 11) \cdot (7, -14, 7)$$

$$= 21 - 98 + 77 = 0$$



अतः रेखाएँ समतलीय हैं।

चरण 3: समतल का समीकरण

अभिलंब सदिश

$$n = (7, -14, 7)$$

7 से भाग देने पर:

$$n = (1, -2, 1)$$

बिंदु $A(-1, -3, -5)$ का उपयोग करने पर:

$$1(x + 1) - 2(y + 3) + 1(z + 5) = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

अंतिम उत्तर

रेखाएँ समतलीय हैं और अभीष्ट समतल है

$$x - 2y + z = 0$$

अथवा

उस समतल का सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $A(-2, 3, -1)$, $B(-3, 7, -4)$ तथा $C(-1, 0, -1)$ से होकर गुजरता है। साथ ही तीन निर्देशांक अक्षों पर इसके अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए तथा मूल-बिन्दु से इसकी दूरी ज्ञात कीजिए।

हल -

दिए गए बिंदु

$$A(-2, 3, -1), \quad B(-3, 7, -4), \quad C(-1, 0, -1)$$

चरण 1: दो दिक् सदिश ज्ञात करें

$$AB = B - A = (-3 + 2, 7 - 3, -4 + 1) = (-1, 4, -3)$$

$$AC = C - A = (-1 + 2, 0 - 3, -1 + 1) = (1, -3, 0)$$



चरण 2: अभिलंब सदिश ज्ञात करें

$$n = AB \times AC$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4 \cdot 0 - (-3)(-3)) - \hat{j}((-1) \cdot 0 - (-3) \cdot 1) + \hat{k}((-1)(-3) - 4 \cdot 1)$$

$$= \hat{i}(0 - 9) - \hat{j}(0 + 3) + \hat{k}(3 - 4)$$

$$= -9\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

धनात्मक रूप लेने पर:

$$n = (9, 3, 1)$$

चरण 3: सदिश समीकरण

बिंदु $A(-2, 3, -1)$ का उपयोग करने पर:

$$r \cdot (9\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = (-2, 3, -1) \cdot (9, 3, 1)$$

$$= -18 + 9 - 1 = -10$$

इसलिए सदिश समीकरण:

$$r \cdot (9\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = -10$$

चरण 4: कार्तीय समीकरण

$$9x + 3y + z = -10$$

चरण 5: अंतःखंड

x-अंतःखंड के लिए: $y = z = 0$

$$9x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{9}$$



y-अंतःखंड के लिए: $x = z = 0$

$$3y = -10 \Rightarrow y = -\frac{10}{3}$$

z-अंतःखंड के लिए: $x = y = 0$

$$z = -10$$

चरण 6: मूल बिंदु से दूरी

$$\begin{aligned} \text{दूरी} &= \frac{|9(0) + 3(0) + 1(0) + 10|}{\sqrt{9^2 + 3^2 + 1^2}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{91}} \end{aligned}$$

अंतिम उत्तर

सदिश समीकरण:

$$r \cdot (9\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = -10$$

कार्तीय समीकरण:

$$9x + 3y + z + 10 = 0$$

अंतःखंड:

$$\left(-\frac{10}{9}, 0, 0\right), \left(0, -\frac{10}{3}, 0\right), (0, 0, -10)$$

मूल बिंदु से दूरी:

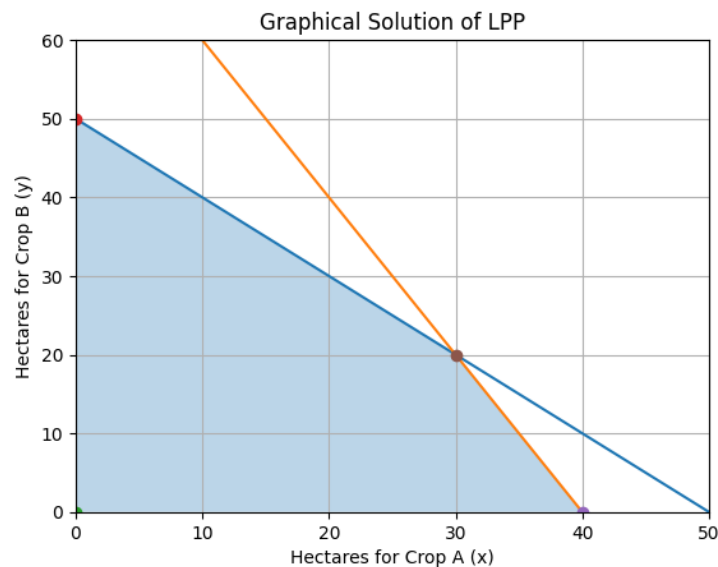
$$\frac{10}{\sqrt{91}}$$

Q45 - किसानों की एक सहकारी समिति के पास दो प्रकार की फसलों A तथा B को उगाने के लिए 50 हेक्टेयर भूमि है। फसलों A तथा B से क्रमशः प्रति हेक्टेयर अनुमानित लाभ ₹10,500 तथा ₹9,000 है। खरपतवार के नियन्त्रण के लिए समिति एक तरल शाकनाशी दवा प्रयोग करती है जिसकी मात्रा फसलों A तथा B के लिए



क्रमशः 20 लीटर तथा 10 लीटर प्रति हेक्टेयर है। उस तालाब, जो भूमि से जल-निकासी करता है, में रहने वाली मछलियों तथा अन्य वन्य जीवन को बचाए रखने के लिए शाकनाशी का प्रयोग 800 लीटर से अधिक नहीं किया जाना चाहिए। प्रत्येक फसल के लिए कितनी-कितनी भूमि नियत की जाए कि लाभ अधिकतम हो? इसे एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर आलेख द्वारा हल कीजिए।

हल -



माना

x = फसल A के लिए आवंटित हेक्टेयर

y = फसल B के लिए आवंटित हेक्टेयर

LPP का सूत्रीकरण

भूमि व्यरोध:

$$x + y \leq 50$$

शाकनाशी व्यरोध:

$$20x + 10y \leq 800$$

$$2x + y \leq 80$$

ऋणोत्तर व्यरोध:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$



उद्देश्य फलन (लाभ):

$$Z = 10500x + 9000y$$

Z का अधिकतमीकरण कीजिए।

कोणीय बिंदु (ग्राफ से)

$$(0, 0), (0, 50), (40, 0), (30, 20)$$

Z का मान

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(0, 50) = 9000(50) = 450000$$

$$Z(40, 0) = 10500(40) = 420000$$

$$Z(30, 20) = 10500(30) + 9000(20)$$

$$= 315000 + 180000$$

$$= 495000$$

अधिकतम लाभ

$$Z_{\max} = ₹4,95,000$$

इस पर:

$$x = 30, \quad y = 20$$

अथवा

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए :

$Z = 20x + 10y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न प्रतिबन्धों के अंतर्गत

$$x + 2y \leq 40$$

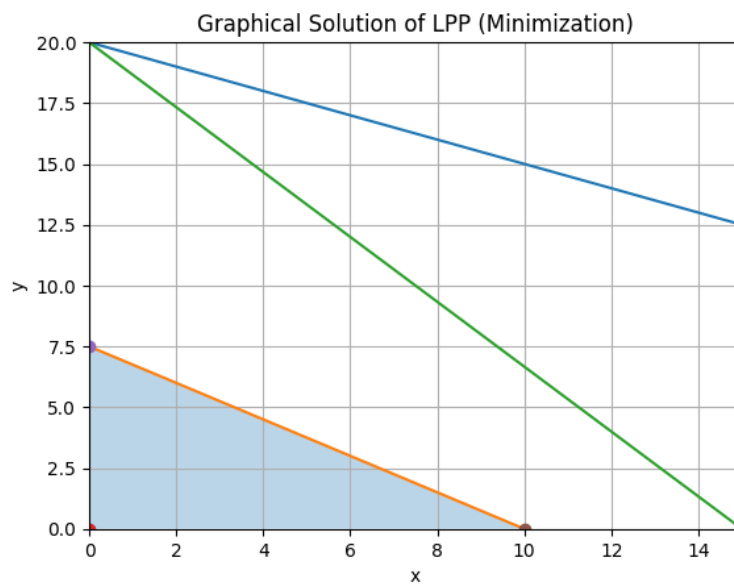
$$3x + y \geq 30$$

$$4x + 3y \geq 60$$

$$x, y \geq 0$$



हल -



न्यूनतमीकरण कीजिए

$$Z = 20x + 10y$$

व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \leq 40$$

$$3x + 4y \leq 30$$

$$4x + 3y \geq 60$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

चरण 1: सीमा रेखाएं (ग्राफ के लिए)

$$x + 2y = 40 \Rightarrow (40, 0), (0, 20)$$

$$x + y = 10 \Rightarrow (10, 0), (0, 10)$$

$$4x + 5y = 30 \Rightarrow (7.5, 0), (0, 6)$$

इन रेखाओं को आलेखित करें और सभी असमानताओं ($x, y \geq 0$ सहित) को संतुष्ट करने वाला उभयनिष्ठ क्षेत्र लें।



चरण 2: सुसंगत कोणीय बिंदु (ग्राफ से)

$$(0, 0), (0, 6), (4, 2), (10, 0)$$

चरण 3: उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करें

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(0, 6) = 20(0) + 10(6) = 60$$

$$Z(4, 2) = 20(4) + 10(2) = 100$$

$$Z(10, 0) = 200$$

अंतिम उत्तर

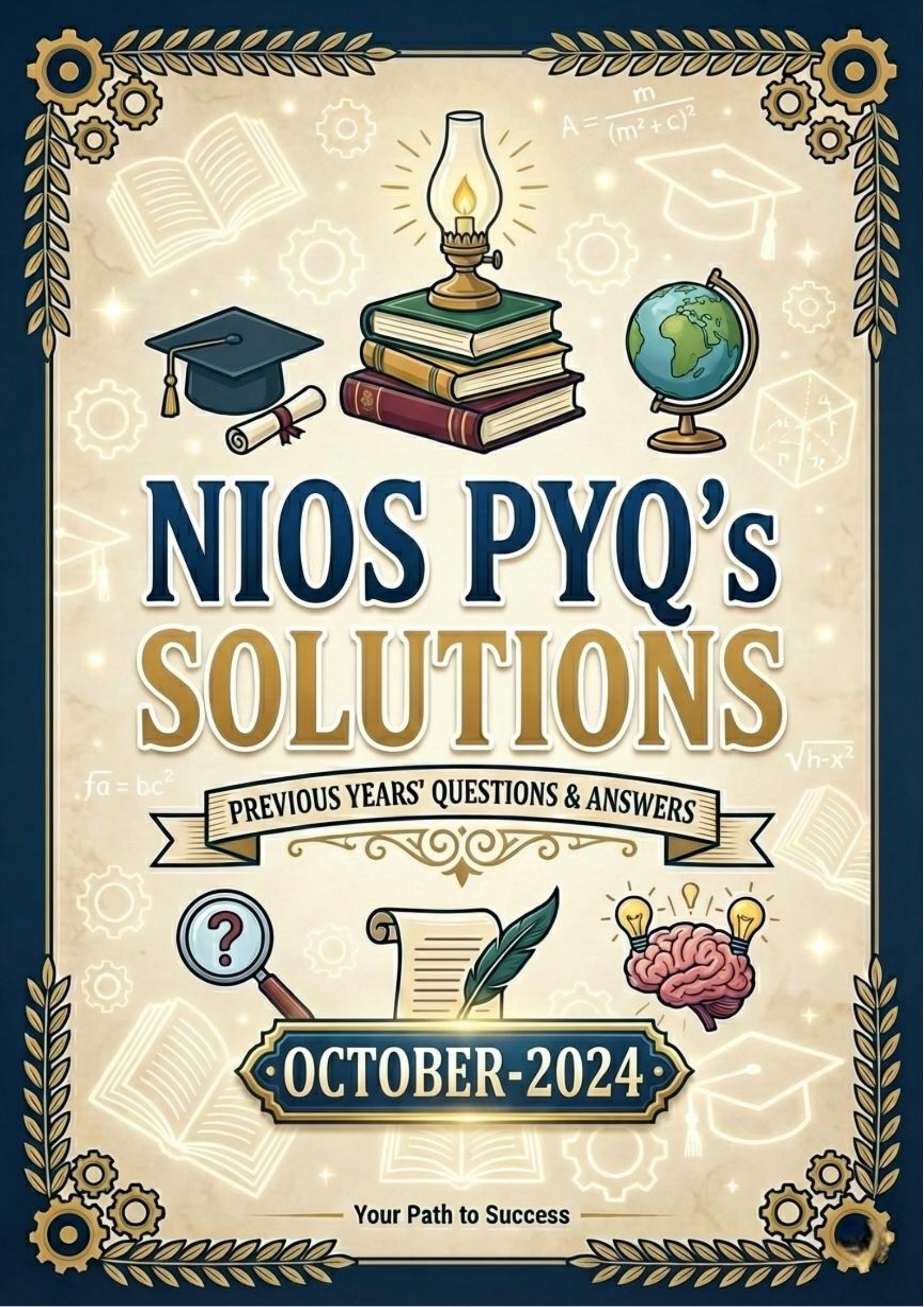
न्यूनतम मान इस पर प्राप्त होता है

$$(x, y) = (0, 0)$$

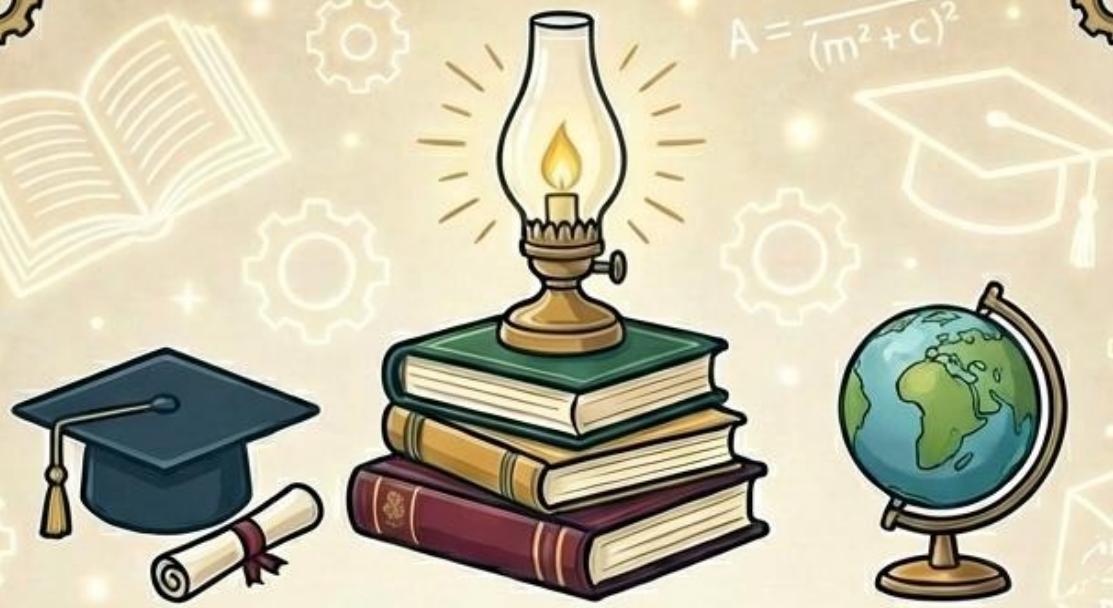
$$Z_{\min} = 0$$

अतः, उद्देश्य फलन का न्यूनतम मान 0 है।





$A = \frac{m}{(m^2 + c)^2}$



NIOS PYQ's SOLUTIONS

$\sqrt{a-bc^2}$

$\sqrt{h-x^2}$

PREVIOUS YEARS' QUESTIONS & ANSWERS



OCTOBER-2024

Your Path to Success

खंड – अ

A. ☐
B. ☒
C. ☐

Q1 - बिन्दु A $(-1, -1)$, B $(2, 3)$ और C $(-2, 6)$ शीर्ष हैं :

(A) एक समबाहु त्रिभुज के

(B) एक समद्विबाहु त्रिभुज के

(C) एक विषमबाहु त्रिभुज के

(D) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के

हल - (D) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के

Q2 - उस रेखा की प्रवणता, जो ऋणात्मक x-अक्ष की दिशा के साथ 60° का कोण बनाती है, है :

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $-\sqrt{3}$

हल - (D) $-\sqrt{3}$

Q3 - अति परवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई है :

(A) $9/2$ इकाई

(B) $8/3$ इकाई

(C) 3 इकाई

(D) 4 इकाई

हल - (A) $9/2$ इकाई

Q4 - वृत्त $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$ की त्रिज्या है :

(A) $\frac{\sqrt{37}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{109}}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{71}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{107}}{8}$

हल - (B) $\frac{\sqrt{109}}{8}$



Q5 - रेखा $x + 7y - 4 = 0$ का अंतखण्ड प्रवणता रूप है :

(A) $\frac{x}{4} + \frac{7y}{4} = 1$

(B) $x = -7y + 4$

(C) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

(D) $y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

हल - (C) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

Q6 - दो आव्यूह $\begin{bmatrix} 2a & b \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ d & 3c \end{bmatrix}$ बराबर होंगे, जब a, b, c, d के मान हैं :

(A) $a = \frac{3}{2}, b = -2, c = -2, d = 4$

(B) $a = -\frac{3}{2}, b = -2, c = 2, d = 4$

(C) $a = \frac{3}{2}, b = -2, c = 2, d = -4$

(D) $a = \frac{3}{2}, b = -2, c = 2, d = 4$

हल - (C) $a = \frac{3}{2}, b = -2, c = 2, d = -4$

Q7 - आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ के लिए :

(A) AB का अस्तित्व है

(B) BA का अस्तित्व है

(C) AB और BA दोनों का अस्तित्व है

(D) AB और BA दोनों के ही अस्तित्व नहीं हैं

हल - (D) AB और BA दोनों के ही अस्तित्व नहीं हैं

Q8 - यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो $|A'|$, जहाँ A' आव्यूह A के परिवर्त को दर्शाता है, है

(A) -16

(B) 16

(C) -8

(D) 8

हल - (A) -16



Q9 - समुच्चय $A = \{x \in I, 0 \leq x \leq 12\}$ में संबंध R जो निम्न प्रकार से परिभाषित है $R = \{(a, b); a = b, a, b \in A\}$ एक :

- (A) स्वतुल्य है। (B) संक्रामक है।
(C) सममित है। (D) समतुल्य संबंध है।

हल - (D) समतुल्य संबंध है।

Q10 - फलन $y = \sec^{-1} x$ का प्रांत है :

- (A) $[-1, 1]$ (B) R
(C) $x \geq 1$ या $x \leq -1$ (D) $R - \{0\}$

हल - (C) $x \geq 1$ या $x \leq -1$

Q11 - एक द्विआधारी संक्रिया $*$ प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर इस प्रकार परिभाषित है कि $a*b = ab$, जहाँ सभी $a, b \in N$ । तब :

- (A) $*$ क्रमविनिमेय है।
(B) $*$ सहचारी है।
(C) $*$ क्रमविनिमेय और सहचारी है।
(D) $*$ न तो क्रमविनिमेय और न ही सहचारी है।

हल - (C) $*$ क्रमविनिमेय और सहचारी है।

Q12 - फलन $y = x^2$, जहाँ सभी $x \in R$, का प्रतिलोम फलन :

- (A) $f^{-1}(x) = -x$ (B) $f^{-1}(x) = x$
(C) $f^{-1}(x) = |x|$ (D) का अस्तित्व नहीं है।

हल - (D) का अस्तित्व नहीं है।



Q13 - यदि $y = (1 - x^2)^5$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है :

(A) $5(1 - x^2)^4$

(B) $(1 - 2x)^5$

(C) $5(1 - x^2)^4(-2x)$

(D) $5(1 - 2x)^4$

हल - (C) $5(1 - x^2)^4(-2x)$

Q14 - यदि $y = \sin 2x \cos 3x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ है :

(A) $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$

(B) $2 \cos 2x \cos 3x + 3 \sin 2x \sin 3x$

(C) $6 \cos 2x \sin 3x - 6 \cos 2x \sin 3x$

(D) $6 \cos 2x \sin 3x + 6 \cos 2x \sin 3x$

हल - (A) $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$

Q15 - निम्न में कौनसी सदिश राशि है?

(A) द्रव्यमान

(B) घनत्व

(C) बल

(D) समय

हल - (C) बल

Q16 - सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी सदिश के समांतर एकक सदिश है :

(A) $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

(B) $\frac{1}{5}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(C) $\frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(D) $\pm \frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

हल - (C) $\frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

Q17 - समतल $2x - 3y + 3z + 27 = 0$ की बिंदु (3, 4, -5) से दूरी है :

(A) 6 इकाई

(B) $\sqrt{22}$ इकाई

(C) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ इकाई

(D) $\sqrt{132}$ इकाई

हल - (C) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ इकाई



Q18 - बिन्दुओं (1, 4, 7) और (3, -2, 5) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है :

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-7}{-2}$

(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{12}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-7}{-2}$

(D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-7}{2}$

हल - (A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-7}{-2}$

Q19 - कथन "यदि x, 4 से विभाजित है तो x एक सम संख्या है" का विलोम कथन है :

(A) यदि x, 4 से विभाजित नहीं है, तो x सम संख्या नहीं है।

(B) यदि x सम संख्या है, तो x, 4 से विभाजित है।

(C) यदि x सम संख्या है, तो x, 4 से विभाजित नहीं है।

(D) यदि x, 4 से विभाजित नहीं है, तो x सम संख्या है।

हल - (B) यदि x सम संख्या है, तो x, 4 से विभाजित है।

Q20 - अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^6 \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ की घात है :

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 10

हल - (A) 2

Q21 - कॉलम - I के कथनों को कॉलम II के सही विकल्प से मिलाएँ।

कॉलम -I

कॉलम -II

(a) आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयव -2 का सहखण्ड है

(P) 13

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो $|adjA|$ है

(Q) -2

(R) -13

(S) 2



हल -

(a) आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयव -2 का सहखण्ड है $\rightarrow (P) 13$

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो $|adjA|$ है $\rightarrow (S) 2$

Q22 - रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) यदि $y = \sqrt{\sin^3 x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ _____ है।

(b) अवकल समीकरण $xdx + ydy = 0$ की कोटि _____ है।

हल - (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x$

(b) 1

Q23 - सही कथन के लिए सत्य और गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

(a) $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ में परिभाषित संबंध "का गुणनखंड है" स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

(b) फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ जो $f(x) = x^2 + 3$ द्वारा परिभाषित है एक एकैकी और आच्छादक फलन है।

हल - (a) सत्य

(b) असत्य

Q24 - निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए :

(a) संख्या 5 से छोटी है।

(b) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम संख्याएँ होती हैं।

हल - (a) संख्या 5 से बड़ी या बराबर है।

(b) एक ऐसी अभाज्य संख्या का अस्तित्व है जो विषम नहीं है।



Q25 - रिक्त स्थानों को भरिए :

- (a) ____ क्रमों के दो आव्यूहों का योग संभव नहीं है।
- (b) यदि आव्यूह A के लिए A^{-1} का अस्तित्व है, तो $(A^{-1})^{-1}$ ____.
- (c) तीन बिंदु सरेख होंगे यदि इन बिन्दुओं से बनने वाली त्रिभुज का क्षेत्रफल ____ है।
- (d) एक वर्ग आव्यूह A एक ____ आव्यूह कहलाएगा यदि $A' = -A$

हल - (a) भिन्न

- (b) A
- (c) शून्य
- (d) विषम-सममित

Q26 - रिक्त स्थानों को भरिए :

- (a) यदि $y = \sin^{-1}(x^2)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ is _____ है।
- (b) $\int 3^{5x-3} dx =$ _____.
- (c) कोटि एक के रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का अभिष्ट हल ____ होता है।
- (d) $\int_{-a}^a \frac{xe^{x^2}}{1+x^2} dx =$ _____.

हल - (a) $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(b) $\frac{3^{5x-3}}{5 \ln 3}$

(c) $ye^{\int P dx} = \int (Qe^{\int P dx}) dx + C$

(d) 0

Q27 - सही कथन के लिए सत्य और गलत कथन के लिए असत्य लिखिए :

- (a) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.
- (b) यदि $x = at^2$ और $y = 2at$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = t$ ।
- (c) वक्र $y = f(x)$ को बिन्दु (x_1, y_1) पर डाले गए अभिलंब की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_1, y_1)$ द्वारा दर्शाई जाती है।

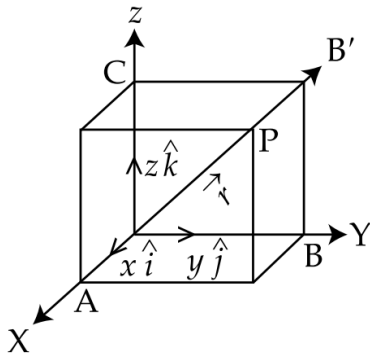


(d) अवकल समीकरण की घात सबसे बड़ी कोटि वाले अवकलज की घात होती है।

हल -

- (a) सत्य
- (b) असत्य
- (c) असत्य
- (d) असत्य

Q28 - संलग्न चित्र को ध्यानपूर्वक पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



- (a) सदिश $\vec{r}$ के संदर्भ में $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ और $z\hat{k}$ को क्या कहा जाता है?
- (b) यदि $|\vec{OA}| = 4$, $|\vec{OB}| = 5$ तथा $|\vec{OC}| = 6$ है, तो OP को घटक सदिशों के रूप में व्यक्त कीजिए।
- (c) यदि त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C के स्थिति सदिशों को $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ से दर्शाया जाए, तो त्रिभुज ABC के केन्द्रक का स्थिति सदिश लिखिए।
- (d) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश है, तो उस बिंदु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो A और B को मिलाने वाले रेखा-खंड को 2:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हल - (a) घटक सदिश

(b) $4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

(c) $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

(d) $\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$



Q29 - निम्न गद्यांश को पढ़ें और नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

मान लीजिए कि f एक वास्तविक फलन है और c , f के प्रांत का कोई बिंदु है तब,

(i) c को स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु कहा जाता है यदि $h > 0$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि सभी $x \in (c - h, c + h)$ के लिए $f(c) \geq f(x)$ संख्या $f(c)$ को f का स्थानीय उच्चिष्ठमान कहा जाता है।

(ii) c को स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु कहा जाता है, यदि $h > 0$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि सभी $x \in (c - h, c + h)$ के लिए $f(c) \leq f(x)$ ।

संख्या $f(c)$ को f का स्थानीय निम्निष्ठ मान कहा जाता है।

x के वे मान जिनके लिए $f'(x) = 0$ स्तब्ध बिंदु या मोड़ बिंदु कहलाते हैं।

x के वे मान जिनके लिए $f'(x) = 0$ या $f'(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है, क्रांतिक बिंदु कहलाते हैं।

इसके अलावा, f के प्रांत के अंतिम बिंदु, स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु नहीं हो सकते हैं।

मान लें कि फलन R से संबद्ध है, तो $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ।

(i) $f(x)$ के कितने क्रांतिक बिंदु हैं?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(ii) निम्न कथन फलन $f(x)$ के क्रांतिक बिंदु के लिए सत्य है ?

(a) $f(x)$ के सभी क्रांतिक बिंदु धनात्मक होते हैं।

(b) $f(x)$ के सभी क्रांतिक बिंदु ऋणात्मक होते हैं।

(c) $f(x)$ के कुछ क्रांतिक बिंदु धनात्मक और अन्य ऋणात्मक होते हैं।

(d) ऊपरी कथनों में कोई भी सत्य नहीं है, क्योंकि $f(x)$ का कोई क्रांतिक बिंदु नहीं है।

(iii) धनात्मक क्रांतिक बिंदु पर, फलन $f(x)$ का :



- (a) स्थानीय उच्चिष्ठ होगा।
- (b) स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- (c) न तो स्थानीय उच्चिष्ठ और न ही स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- (d) ऊपर में दिए गए में से कोई भी नहीं है क्योंकि $f(x)$ का कोई क्रांतिक बिंदु नहीं है।

(iv) ऋणात्मक क्रांतिक बिंदु पर, फलन $f(x)$ का :

- (a) स्थानीय उच्चिष्ठ होगा
- (b) स्थानीय निम्निष्ठ होगा
- (c) न तो स्थानीय उच्चिष्ठ और न ही स्थानीय निम्निष्ठ होगा
- (d) ऊपर में दिए गए में से कोई भी नहीं है क्योंकि $f(x)$ का कोई क्रांतिक बिंदु नहीं है।

(v) $f(x)$ का स्थानीय निम्निष्ठ मान है :

- (a) 3
- (b) $1/3$
- (c) -1
- (d) इनमें से कोई नहीं

(vi) $f(x)$ का स्थानीय उच्चिष्ठ मान है :

- (a) 7
- (b) 3
- (c) 5
- (d) इनमें से कोई नहीं



हल -

- (i) (c) 2
- (ii) (c) $f(x)$ के कुछ क्रांतिक बिंदु धनात्मक और अन्य ऋणात्मक होते हैं।
- (iii) (b) स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- (iv) (a) स्थानीय उच्चिष्ठ होगा
- (v) (b) $1/3$
- (vi) (b) 3



खंड – ब

 A. ☐
 B. ☒
 C. ☐


Q30 - उस अति परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(0, \pm 6)$ तथा उत्केन्द्रता $e = \frac{5}{3}$ है।

हल -

चरण 1: मानक रूप की पहचान करें

चूंकि शीर्ष $(0, \pm a)$ पर हैं, इसका अर्थ है कि अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष के अनुदिश है।
इसलिए मानक समीकरण है:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

यहाँ $a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$.

चरण 2: उत्केन्द्रता का उपयोग करें

अतिपरवलय के लिए:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae$$

$$c = 6 \cdot \frac{5}{3} = 10 \Rightarrow c^2 = 100$$

चरण 3: a, b, c के बीच संबंध

अतिपरवलय के लिए:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

इसलिए:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 36 = 64$$

अंतिम उत्तर:

$$\boxed{\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1}$$



अथवा

दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि $(-1, 1)$, उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{2}$ तथा नियता $x - y + 3 = 0$ है।

हल -

चरण 1: शंकु परिच्छेद की परिभाषा का प्रयोग करें

दीर्घवृत्त पर किसी भी बिंदु $P(x, y)$ के लिए:

$$PF = e \cdot PD$$

चरण 2: नाभि $F(-1, 1)$ से दूरी

$$PF = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$$

चरण 3: नियता $x - y + 3 = 0$ से दूरी

रेखा $ax + by + c = 0$ से बिंदु (x, y) की दूरी है:

$$PD = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

यहाँ $a = 1, b = -1, c = 3$:

$$PD = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$$

चरण 4: $e = \frac{1}{2}$ का प्रयोग करें

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$$

चरण 5: दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{8}(x - y + 3)^2$$

8 से गुणा करने पर:

$$8[(x + 1)^2 + (y - 1)^2] = (x - y + 3)^2$$



विस्तार करें:

बायां पक्ष:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$8(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = 8x^2 + 8y^2 + 16x - 16y + 16$$

दायां पक्ष:

$$(x - y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$$

सभी पदों को एक तरफ लाने पर (बायां - दायां = 0):

$$(8x^2 - x^2) + (8y^2 - y^2) + 2xy + (16x - 6x) + (-16y + 6y) + (16 - 9) = 0$$

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$$

अंतिम उत्तर

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$$

Q31 - आव्यूह समीकरण हल कीजिए : $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

हल -

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह से:

$$2x - 3y = 1(1)$$

$$x + y = 3(2)$$

(2) से:

$$x = 3 - y$$



(1) में रखने पर:

$$2(3 - y) - 3y = 1$$

$$6 - 2y - 3y = 1$$

$$6 - 5y = 1 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

तब:

$$x = 3 - 1 = 2$$

अंतिम उत्तर:

$$x = 2, \quad y = 1$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

हल -

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर:

$$= 0 \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

अब 2×2 सारणिक का मान निकालने पर:

$$= -(x \cdot x - x \cdot 1)$$



$$= -(x^2 - x)$$

$$= -x^2 + x$$

शून्य के बराबर रखने पर:

$$-x^2 + x = 0$$

$$x(1 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{या} \quad x = 1$$

Q32 - सिद्ध कीजिए:
$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

हल -

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$

पंक्तियों से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर:

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$$

अब स्तंभों से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर:

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

अब सारणिक का मान ज्ञात करें:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$



प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर:

$$= -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

उपसारणिकों की गणना:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$$

मान रखने पर:

$$= -1(0) - 1(-2) + 1(2)$$

$$= 0 + 2 + 2$$

$$= 4$$

इसलिए,

$$\Delta = a^2 b^2 c^2 \cdot 4$$

Q33 – सरल कीजिए : $\tan[\sin^{-1}(\sqrt{1-x})]$

हल -

$$\tan(\sin^{-1}(\sqrt{1-x}))$$

माना

$$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{1-x}) \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1-x}$$

तब

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - (1-x)} = \sqrt{x}$$



इसलिए

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

अंतिम उत्तर

$$\boxed{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$$

Q34 – मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

हल -

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$$

यदि $x > 3$: $|x-3| = x-3 \Rightarrow \frac{|x-3|}{x-3} = 1$

यदि $x < 3$: $|x-3| = -(x-3) \Rightarrow \frac{|x-3|}{x-3} = -1$

बायीं सीमा = -1 , दायीं सीमा = $1 \Rightarrow$ बराबर नहीं $\Rightarrow$ सीमा का अस्तित्व नहीं है।

अंतिम उत्तर:

अस्तित्व नहीं है

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

हल -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

व्यंजक को पुनः लिखने पर:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{x} \right)$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right)$$

मानक सीमा का उपयोग करने पर:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

माना $t = 3x$. जैसे $x \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

इसलिए,

$$= 1 \cdot 3$$

$$= 3$$

Q35 - यदि $y = \frac{x+1}{x-1}, (x \neq 1)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल -

पुनः लिखने पर:

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

प्रथम अवकलज:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \frac{d}{dx} (x-1)^{-1} = 2(-1)(x-1)^{-2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

द्वितीय अवकलज:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (-2(x-1)^{-2}) = -2(-2)(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

अंतिम उत्तर:

$$\boxed{\frac{4}{(x-1)^3}}$$



अथवा

यदि $y = \frac{1}{x} e^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल -

$$y = e^x \cdot x^{-1}$$

गुणन नियम:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot x^{-1} + e^x \cdot (-1)x^{-2} = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

अंतिम उत्तर:

$$\boxed{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}$$

Q36 - यदि $\cos y = x \cos(a+y)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

हल -

दिया है:

$$\cos y = x \cos(a+y)$$

सिद्ध कीजिए:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर:

बायां पक्ष:

$$\frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}$$

दायां पक्ष (गुणन नियम):

$$\frac{d}{dx}[x \cos(a+y)] = \cos(a+y) + x[-\sin(a+y)] \frac{dy}{dx}$$



इसलिए:

$$-\sin y y' = \cos(a + y) - x \sin(a + y) y'$$

y' वाले पदों को एक साथ लेने पर:

$$y'[-\sin y + x \sin(a + y)] = \cos(a + y)$$

मूल समीकरण से:

$$x = \frac{\cos y}{\cos(a + y)}$$

मान रखने पर:

$$-\sin y + \frac{\cos y}{\cos(a + y)} \sin(a + y) = \frac{-\sin y \cos(a + y) + \cos y \sin(a + y)}{\cos(a + y)}$$

अंश:

$$\sin(a + y - y) = \sin a$$

इसलिए कोष्ठक बन जाता है:

$$\frac{\sin a}{\cos(a + y)}$$

इस प्रकार:

$$y' \cdot \frac{\sin a}{\cos(a + y)} = \cos(a + y) \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$$

सिद्ध हुआ।

Q37 - समतल $2x - 3y + 3z + 27 = 0$ से बिंदु $(3, 4, -5)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल -

बिंदु $(3, 4, -5)$ की समतल $2x - 3y + 3z + 27 = 0$ से दूरी



सूत्र:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

यहाँ $a = 2, b = -3, c = 3, d = 27$

अंश:

$$|2(3) + (-3)(4) + 3(-5) + 27| = |6 - 12 - 15 + 27| = |6| = 6$$

हर:

$$\sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$$

अंतिम उत्तर:

$$\frac{6}{\sqrt{22}}$$

Q38 - समतल के समीकरण $4x - 5y + 6z - 60 = 0$ को अन्तः खण्ड स्वरूप में बदलिये। इसके निर्देशांक-अक्षों पर अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल -

समतल $4x - 5y + 6z - 60 = 0$ को अंतःखंड रूप में परिवर्तित कीजिए और अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

$$4x - 5y + 6z = 60$$

60 से भाग देने पर:

$$\frac{x}{15} - \frac{y}{12} + \frac{z}{10} = 1$$

अंतःखंड:

- x-अंतःखंड: $x = 15$
- y-अंतःखंड: $y = -12$
- z-अंतःखंड: $z = 10$



अंतिम उत्तर:

$$\frac{x}{15} - \frac{y}{12} + \frac{z}{10} = 1; (15, 0, 0), (0, -12, 0), (0, 0, 10)$$

Q39 - दीर्घवृत्त $3x^2 + 2y^2 = 6$ के लिए उसके अक्षों की लंबाइयाँ, नाभियों के निर्देशांक, शीर्ष और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

हल -

चरण 1: मानक दीर्घवृत्त रूप में परिवर्तित करें

दिया है:

$$3x^2 + 2y^2 = 6$$

दोनों पक्षों को 6 से भाग देने पर:

$$\frac{3x^2}{6} + \frac{2y^2}{6} = 1$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

अब मानक दीर्घवृत्त से तुलना करने पर:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

जहाँ a^2 बड़ा हर है (दीर्घ अक्ष की दिशा)।

यहाँ:

$$a^2 = 3, b^2 = 2$$

इसलिए:

$$a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$$

चूँकि a^2, y^2 के नीचे है, दीर्घ अक्ष y -अक्ष के अनुदिश है।



चरण 2: अक्षों की लम्बाइयाँ

सूत्र:

- दीर्घ अक्ष की लंबाई = $2a$
- लघु अक्ष की लंबाई = $2b$

इसलिए:

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2\sqrt{2}$$

चरण 3: नाभियों के लिए c ज्ञात करें

दीर्घवृत्त के लिए सूत्र:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow c = 1$$

चरण 4: नाभियों के निर्देशांक

चूँकि दीर्घ अक्ष y -अक्ष के अनुदिश है, नाभियाँ हैं:

$$(0, \pm c) = (0, \pm 1)$$

नाभियाँ:

$$(0, 1) \text{ और } (0, -1)$$

चरण 5: शीर्ष

दीर्घ अक्ष (y -अक्ष) पर शीर्ष:

$$(0, \pm a) = (0, \pm\sqrt{3})$$

लघु अक्ष (x -अक्ष) पर सह-शीर्ष:

$$(\pm b, 0) = (\pm\sqrt{2}, 0)$$



शीर्ष (दीर्घ):

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

सह-शीर्ष (लघु):

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

चरण 6: उत्केन्द्रता

सूत्र:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(यदि आप परिमेयकृत रूप चाहते हैं:)

$$e = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

उत्केन्द्रता:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\text{या } \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Q40 - प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

हल -

चरण 1: सारणिक (Determinant)

2×2 के लिए, $|A| = ad - bc$

यहाँ $a = 2, b = -6, c = 1, d = -2$

$$|A| = 2(-2) - (-6)(1) = -4 + 6 = 2$$

चूँकि सारणिक $\neq 0$, व्युत्क्रम का अस्तित्व है।



चरण 2: सहखंडज आव्यूह (Adjoint matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ के लिए,}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

इसलिए:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

चरण 3: व्युत्क्रम सूत्र

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

अंतिम उत्तर:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Q41 - सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$.

हल -

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

चरण 1: प्रतिलोम tan के योग सूत्र का उपयोग करें

सूत्र:

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \left(\frac{a + b}{1 - ab} \right)$$

(जब $ab < 1$ और कोण मुख्य परिसर में हों — यहाँ यह ठीक है क्योंकि संख्याएँ छोटी और धनात्मक हैं)



माना:

$$a = \frac{1}{7}, b = \frac{1}{13}$$

चरण 2: अंश $a + b$ की गणना करें

$$a + b = \frac{1}{7} + \frac{1}{13} = \frac{13 + 7}{91} = \frac{20}{91}$$

चरण 3: हर $1 - ab$ की गणना करें

$$ab = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{91}$$

चरण 4: सूत्र में मान रखने पर

$$\tan^{-1} \left(\frac{a + b}{1 - ab} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{20}{91}}{\frac{90}{91}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{20}{90} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2}{9} \right)$$

इसलिए,

$$\tan^{-1} \left(\frac{1}{7} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{13} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2}{9} \right)$$

सिद्ध हुआ

Q42 - मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$.

हल -

माना

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

अब $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$ प्रतिस्थापित करने पर।

चूंकि सीमाएं 0 से $\pi/2$ ही रहती हैं,



$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(\frac{\pi}{2} - x)} dx$$

सर्वसमिकाओं का उपयोग करने पर:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

$$I = - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

$$I = -I$$

इसलिए,

$$2I = 0$$

$$I = 0$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-3}^3 |x + 1| dx$.

हल -

व्यंजक $x + 1 = 0$ है $x = -1$ पर।

इसलिए समाकलन को $x = -1$ पर विभाजित करें।

$x < -1$ के लिए, $x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1)$

$x > -1$ के लिए, $x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$

$$I = \int_{-3}^{-1} -(x + 1) dx + \int_{-1}^3 (x + 1) dx$$

प्रथम समाकलन:

$$\int_{-3}^{-1} -(x + 1) dx = \int_{-3}^{-1} (-x - 1) dx$$



$$= \left[-\frac{x^2}{2} - x \right]_{-3}^{-1}$$

$x = -1$ पर:

$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$x = -3$ पर:

$$-\frac{9}{2} + 3 = -\frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) = 2$$

द्वितीय समाकलन:

$$\int_{-1}^3 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^3$$

$x = 3$ पर:

$$\frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}$$

$x = -1$ पर:

$$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{15}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 8$$

इसलिए,

$$I = 2 + 8 = 10$$

Q43 -

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ और $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।



हल -

चरण 1: प्राचलिक रूप में लिखें

पहली रेखा L_1 के लिए, माना प्राचल t है:

$$x = -1 + 3t, \quad y = -3 + 5t, \quad z = -5 + 7t$$

L_1 पर बिंदु:

$$A(-1, -3, -5)$$

दिक् सदिश:

$$d_1 = (3, 5, 7)$$

दूसरी रेखा L_2 के लिए, माना प्राचल s है:

$$x = 2 + s, \quad y = 4 + 4s, \quad z = 6 + 7s$$

L_2 पर बिंदु:

$$B(2, 4, 6)$$

दिक् सदिश:

$$d_2 = (1, 4, 7)$$

चरण 2: समतलीयता की जाँच करें

बिंदुओं A और B को मिलाने वाला सदिश:

$$AB = B - A = (3, 7, 11)$$

अब अदिश त्रिक गुणनफल की गणना करें:

$$AB \cdot (d_1 \times d_2)$$

पहले सदिश गुणनफल ज्ञात करें:

$$d_1 \times d_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$



$$= i(35 - 28) - j(21 - 7) + k(12 - 5)$$

$$= (7, -14, 7)$$

अब AB के साथ अदिश गुणन करें:

$$(3, 7, 11) \cdot (7, -14, 7)$$

$$= 21 - 98 + 77$$

$$= 0$$

चूँकि अदिश त्रिक गुणनफल $= 0$ है,
रेखाएँ समतलीय हैं।

7 से भाग देने पर:

$$n = (1, -2, 1)$$

बिंदु $A(-1, -3, -5)$ का उपयोग करने पर:

$$1(x + 1) - 2(y + 3) + 1(z + 5) = 0$$

$$x + 1 - 2y - 6 + z + 5 = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

अंतिम उत्तर

रेखाएँ समतलीय हैं और समतल का समीकरण है

$$x - 2y + z = 0$$

Q44 - उत्पाद A या B का उत्पादन करने वाली एक मशीन, A की 1 इकाई के उत्पादन के लिए 2 इकाई रसायन और 1 इकाई यौगिक का उपयोग करती है: और B की 1 इकाई के उत्पादन के लिए 1 इकाई रसायन और 2 इकाई यौगिक का उपयोग करती है। केवल 800 इकाई रसायन और 1000 इकाई यौगिक की मात्रा उपलब्ध है। A और B की प्रत्येक इकाई पर क्रमशः ₹ 30 और ₹22 का लाभ अर्जित करती है। अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु इकाइयों A और B का इष्टतम



हल -

चरण 1: प्राचलिक रूप में लिखें

पहली रेखा L_1 के लिए, माना प्राचल t है:

$$x = -1 + 3t, \quad y = -3 + 5t, \quad z = -5 + 7t$$

L_1 पर बिंदु:

$$A(-1, -3, -5)$$

दिक् सदिश:

$$d_1 = (3, 5, 7)$$

दूसरी रेखा L_2 के लिए, माना प्राचल s है:

$$x = 2 + s, \quad y = 4 + 4s, \quad z = 6 + 7s$$

L_2 पर बिंदु:

$$B(2, 4, 6)$$

दिक् सदिश:

$$d_2 = (1, 4, 7)$$

चरण 2: समतलीयता की जाँच करें

बिंदुओं A और B को मिलाने वाला सदिश:

$$AB = B - A = (3, 7, 11)$$

अब अदिश त्रिक गुणनफल की गणना करें:

$$AB \cdot (d_1 \times d_2)$$

पहले सदिश गुणनफल ज्ञात करें:



$$d_1 \times d_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(35 - 28) - \mathbf{j}(21 - 7) + \mathbf{k}(12 - 5)$$

$$= (7, -14, 7)$$

अब AB के साथ अदिश गुणन करें:

$$(3, 7, 11) \cdot (7, -14, 7)$$

$$= 21 - 98 + 77$$

$$= 0$$

चूंकि अदिश त्रिक गुणनफल = 0 है,
रेखाएँ समतलीय हैं।

7 से भाग देने पर:

$$n = (1, -2, 1)$$

बिंदु $A(-1, -3, -5)$ का उपयोग करने पर:

$$1(x + 1) - 2(y + 3) + 1(z + 5) = 0$$

$$x + 1 - 2y - 6 + z + 5 = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

अंतिम उत्तर

रेखाएँ समतलीय हैं और समतल का समीकरण है

$$\boxed{x - 2y + z = 0}$$

अथवा



एक निर्माता 'नट' और 'बोल्ट' का उत्पादन करता है। नट्स का एक पैकेट तैयार करने में मशीन A पर 1 घंटा काम करना पड़ता है और मशीन पर 3 घंटे काम करना पड़ता है। बोल्ट का एक पैकेट तैयार करने में मशीन A पर 3 घंटे काम करना पड़ता है और मशीन B पर 1 घंटा काम करना पड़ता है। निर्माता को नट्स के एक पैकेट और बोल्ट के एक पैकेट पर क्रमशः ₹ 17.50 और ₹7 का लाभ प्राप्त होता है। यदि वह इन दोनों मशीनों का प्रतिदिन 12 घंटे उपयोग करता हो, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए, उसको प्रतिदिन इन दोनों उत्पादकों के कितने कितने पैकेट तैयार करने होंगे ? एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और आलेख विधि से हल कीजिए।

हल -

माना

$x =$ प्रति दिन नट्स के पैकेटों की संख्या

$y =$ प्रति दिन बोल्ट्स के पैकेटों की संख्या

LPP का सूत्रीकरण

मशीन A पर समय:

$$1x + 3y \leq 12$$

मशीन B पर समय:

$$3x + 1y \leq 12$$

ऋणोत्तर प्रतिबंध:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

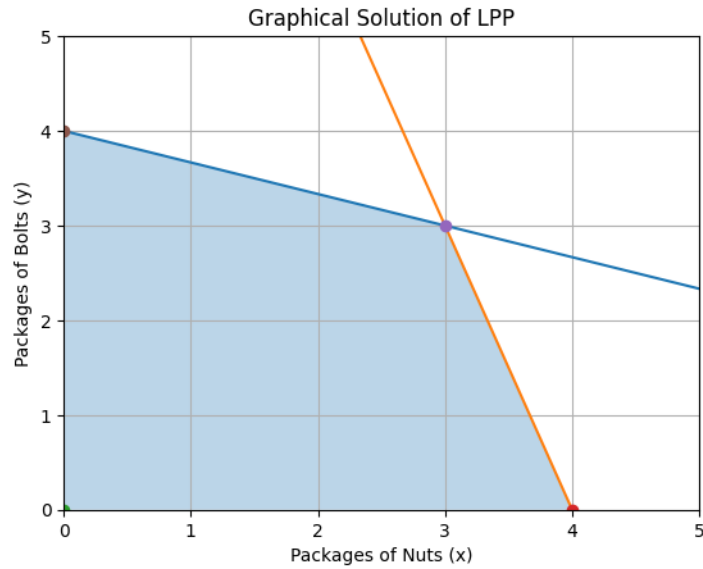
उद्देश्य फलन (लाभ):

$$Z = 17.5x + 7y$$

Z का अधिकतमीकरण कीजिए।

आलेखीय हल (कोणीय बिंदु विधि)





सुसंगत क्षेत्र निम्न निकाय द्वारा निर्धारित होता है:

$$x + 3y \leq 12$$

$$3x + y \leq 12$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदु:

$$(0, 0), \quad (4, 0), \quad (3, 3), \quad (0, 4)$$

उद्देश्य फलन:

$$Z = 17.5x + 7y$$

कोणीय बिंदुओं पर मान:

$$Z(0, 0) = 17.5(0) + 7(0) = 0$$

$$Z(4, 0) = 17.5(4) + 7(0) = 70$$

$$Z(0, 4) = 17.5(0) + 7(4) = 28$$

$$Z(3, 3) = 17.5(3) + 7(3) = 52.5 + 21 = 73.5$$



चूंकि

$$\max Z = 73.5 \text{ इस पर } (x, y) = (3, 3),$$

इष्टतम हल है

$$x = 3, \quad y = 3$$

अधिकतम लाभ:

$$Z_{\max} = ₹73.50$$

Q45 - दर्शाइए की दिये गए परिमाण के आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

हल -

माना दिया गया परिमाण P है।

माना लंबाई l और चौड़ाई b है।

तब,

$$2(l + b) = P$$

$$l + b = \frac{P}{2}$$

आयत का क्षेत्रफल:

$$A = lb$$

b को l के पदों में व्यक्त करने पर:

$$b = \frac{P}{2} - l$$

क्षेत्रफल में मान रखने पर:

$$A = l \left(\frac{P}{2} - l \right)$$

$$A = \frac{P}{2}l - l^2$$



$$A = -l^2 + \frac{P}{2}l$$

यह l में नीचे की ओर खुलने वाला एक द्विघात समीकरण है, इसलिए अधिकतम क्षेत्रफल शीर्ष पर होता है।

अवकलन करने पर:

$$\frac{dA}{dl} = -2l + \frac{P}{2}$$

शून्य के बराबर रखने पर:

$$-2l + \frac{P}{2} = 0$$

$$2l = \frac{P}{2}$$

$$l = \frac{P}{4}$$

तब,

$$b = \frac{P}{2} - \frac{P}{4}$$

$$b = \frac{P}{4}$$

इस प्रकार,

$$l = b$$

अतः, आयत एक वर्ग बन जाता है।

अधिकतम क्षेत्रफल:

$$A_{\max} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

इसलिए, दिए गए परिमाण वाले सभी आयतों में, वर्ग का क्षेत्रफल सबसे अधिक होता है।

अथवा



वक्र $y^2 = 4x$ का वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(z, 1)$ से निकटतम दूरी पर है।

हल -

दिया गया वक्र:

$$y^2 = 4x$$

माना वक्र पर बिंदु $P(x, y)$ है।

चूंकि $y^2 = 4x$,

$$x = \frac{y^2}{4}$$

दिया गया बाह्य बिंदु $(2, 1)$ है।

$P(x, y)$ से $(2, 1)$ की दूरी का वर्ग:

$$D^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$x = \frac{y^2}{4}$ रखने पर:

$$D^2 = \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)^2 + (y - 1)^2$$

माना

$$F(y) = \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)^2 + (y - 1)^2$$

अवकलन करने पर:

$$\frac{dF}{dy} = 2\left(\frac{y^2}{4} - 2\right)\left(\frac{y}{2}\right) + 2(y - 1)$$

$$= y\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) + 2(y - 1)$$

शून्य के बराबर रखने पर:

$$y\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) + 2(y - 1) = 0$$



4 से गुणा करने पर:

$$y(y^2 - 8) + 8(y - 1) = 0$$

$$y^3 - 8y + 8y - 8 = 0$$

$$y^3 - 8 = 0$$

$$y = 2$$

अब,

$$x = \frac{y^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

इसलिए, वक्र पर निकटतम बिंदु है

$$(1, 2)$$





Thank you!



We hope you found this material helpful. We wish you the very best for your examination.



Strive for Excellence – Your Path to Success